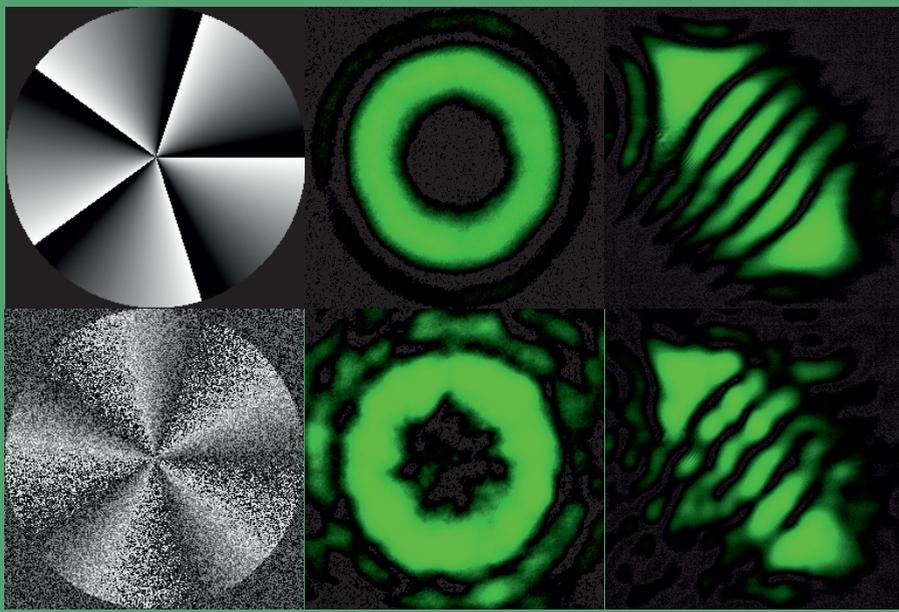


В.В. Котляр, А.А. Ковалев

Топологический заряд оптических вихрей



ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ
«Кристаллография и фотоника» РАН

Самарский национальный
исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва

В.В. Котляр, А.А. Ковалев

Топологический заряд оптических вихрей

Самара
«Новая Техника»
2021

УДК 535.42
ББК 22.343.4

*Подготовка материала книги и ее издание
поддержана грантом РФФИ 18-29-20003*

Топологический заряд оптических вихрей / В.В. Котляр, А.А. Ковалев.
Самара: Новая техника, 2021. – 185 с. – ISBN 978-5-88940-157-5.

Книга посвящена рассмотрению необычных лазерных пучков – вихревых или сингулярных пучков. Они называются вихревыми, потому что у них поток энергии вращается по спирали вокруг оптической оси, когда пучок распространяется вдоль этой оси. А сингулярными они называются потому, что в сечении таких пучков имеются изолированные точки с нулевой интенсивностью, в которых фаза не определена. Эти точки являются сингулярными (необычными точками). Вихревые лазерные пучки описываются двумя интегральными (усредненными) характеристиками: орбитальным угловым моментом (ОУМ) и топологическим зарядом (ТЗ). ОУМ пучка показывает с каким моментом силы будет действовать свет на микрочастицу, помещенную в фокус вихревого лазерного пучка. А ТЗ пучка показывает, сколько полных скачков на 2π приобретет фаза в сечении пучка при обходе по замкнутому контуру, охватывающему весь пучок. Если ОУМ пучка сохраняется при распространении скалярного парааксиального лазерного пучка, то ТЗ иногда сохраняется, а иногда нет. Нормированный на мощность пучка ОУМ может быть и целым, и дробным числом. А ТЗ пучка (кроме начальной плоскости и на бесконечности) всегда целый. Исследованию ОУМ вихревых пучков посвящено достаточное число монографий, а по исследованию ТЗ монографий нет. Эта книга как раз и посвящена изучению топологического заряда вихревых лазерных пучков.

Книга предназначена для широкого круга научных работников, инженеров, работающих в области оптики, фотоники, лазерной физики, оптоинформационных технологий, оптического приборостроения. Также может быть полезной для бакалавров и магистров по специальностям "Прикладные математика и физика", "Прикладная математика и информатика", "Оптика" и аспирантам, специализирующимся в этих областях.

ISBN 978-5-88940-157-5



© Новая техника, 2021
© ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 2021
© Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 2021
© В.В. Котляр, А.А. Ковалев, 2021

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Топологический заряд суперпозиции оптических вихрей	6
1.1 Топологическая конкуренция вихревых мод	6
1.1.1 Топологический заряд оптического вихря, прошедшего амплитудную маску	6
1.1.2 Топологический заряд внеосевого оптического вихря	8
1.1.3 Топологический заряд оптического вихря с несколькими центрами фазовой сингулярности	9
1.1.4 Топологический заряд осевой линейной комбинации оптических вихрей	9
1.1.5 Топологический заряд суммы двух гауссовых оптических вихрей	11
1.1.6 Топологический заряд в произвольной плоскости	14
1.1.7 Топологический заряд для оптического вихря с начальным дробным зарядом	16
1.1.8 Топологический заряд эллиптического вихря в гауссовом пучке	18
1.2 Топологический заряд оптических вихрей без радиальной симметрии	21
1.2.1 Топологический заряд асимметричного пучка Лагерра-Гаусса	22
1.2.2 Топологический заряд асимметричного пучка Бесселя-Гаусса	24
1.2.3 Топологический заряд асимметричного пучка Куммера	27
1.2.4 Топологический заряд оптического вихря в виде суммы двух мод Эрмита-Гаусса	28
1.2.5 Топологический заряд вихревого пучка Эрмита-Гаусса	29
1.2.6 Моделирование	31
Глава 2. Топологический заряд гауссова пучка с несколькими оптическими вихрями	36
2.1 Сохранение топологического заряда при смещении оптических вихрей	36
2.1.1 Мощность, орбитальный угловой момент и топологический заряд гауссова пучка с фазовыми сингулярностями, расположенными на окружности	36
2.1.2 Численное моделирование распространения в случайной среде	39
2.2 Спиральная фазовая пластинка с множеством центров сингулярности	43
2.2.1 Топологический заряд поля от МСФП	45
2.2.2 Орбитальный угловой момент пучка после МСФП	46
2.2.3 Амплитуда светового поля, прошедшего МСФП	48
2.2.4 Эксперимент и моделирование	50
Глава 3. Эволюция оптических вихрей с начальным дробным топологическим зарядом	55
3.1 Рождение оптических вихрей при распространении дробного вихря	55
3.1.1 Теория Берри оптического вихря с дробным зарядом	57
3.1.2 Моделирование	61
3.1.3 Эксперимент	62
3.1.4 Не сохранение топологического заряда для суперпозиции оптических вихрей	64
3.2 Непараксиальная эволюция оптического вихря с дробным зарядом	68
3.2.1 Топологический заряд начального дробного вихря в ближней зоне	69
3.2.2 Топологический заряд начального дробного вихря в зоне Френеля	73
3.2.3 Топологический заряд начального дробного вихря в дальней зоне	74

Глава 4. Астигматическое преобразование краевых дислокаций в вихревые	80
4.1 Преобразование двух краевых дислокаций первого порядка	80
4.1.1 Комплексная амплитуда на двойном фокусном расстоянии	81
4.1.2 Орбитальный угловой момент	85
4.1.3 Две несимметричные параллельные линии нулей интенсивности	87
4.1.4 Астигматический пучок cos-Гаусса	88
4.1.5 Моделирование	89
4.2 Астигматическое преобразование одной краевой дислокации высокого порядка	95
4.2.1 Комплексная амплитуда поля с краевой дислокацией на двойном фокусном расстоянии	97
4.2.2 Моделирование	100
Глава 5. Оптические вихри с бесконечным топологическим зарядом	102
5.1 Оптические пучки с бесконечным числом вихрей	102
5.1.1 Структурно устойчивые гауссовы пучки	103
5.1.2 Гауссов пучок с вихревой косинусной функцией	104
5.1.3 Гауссов пучок с вихревой функцией Бесселя	111
5.2 Оптические вихри с бесконечным числом винтовых дислокаций	113
5.2.1 Косинусный оптический вихрь с квадратичным аргументом	115
5.2.2 Косинусный оптический вихрь высокого порядка	119
5.2.3 Астигматический косинусный вихрь с квадратичным аргументом	125
Глава 6. Управление топологическим зарядом и орбитальным угловым моментом	130
6.1 Топологический заряд суперпозиции двух пучков Бесселя-Гаусса	130
6.1.1 Расчет топологического заряда суммы двух пучков БГ	131
6.1.2 Топологический заряд суперпозиции двух пучков Бесселя-Гаусса с одинаковыми весовыми и масштабными коэффициентами	134
6.1.3 Моделирование	138
6.1.4 Моделирование в случае примерного равенства весовых коэффициентов	143
6.2 Орбитальный угловой момент асимметричных пучков Куммера	145
6.2.1 Смещённые пучки Куммера	146
6.2.2 Орбитальный угловой момент асимметричного пучка Куммера	149
6.2.3 Численное моделирование	151
6.3 Пучки Фурье-Бесселя с конечной энергией	153
6.3.1 Амплитуда пучков Фурье-Бесселя	154
6.3.2 Энергия мод Фурье-Бесселя дробного порядка	156
6.3.3 Моделирование	157
Заключение	162
Литература	163

Введение

Вихревые лазерные пучки являются объектом пристального внимания ученых оптиков. Это связано с широким применением вихревых лазерных пучков для решения многих актуальных практических задач: стабильное распространение в турбулентной атмосфере, увеличение плотности информационного канала лазерной связи, оптический захват и манипулирование микрообъектами, квантовая информатика. Вихревые лазерные пучки характеризуются двумя основными параметрами – орбитальным угловым моментом (ОУМ) и топологическим зарядом (ТЗ). ОУМ определяется амплитудой и фазой светового поля, а ТЗ зависит только от фазы светового поля. Топологический заряд оптического вихря определяется как целое число скачков фазы на 2π при обходе точки сингулярности по любому замкнутому контуру. Если в пучке точек фазовой сингулярности (точек, в которых фаза не определена) несколько, то ТЗ пучка равен сумме ТЗ каждой сингулярности. Орбитальный угловой момент параксиальных вихревых пучков сохраняется при их распространении в свободном пространстве, а про топологический заряд этого сказать нельзя. Общего доказательства сохранения ТЗ на сегодня нет, поэтому ТЗ для каждого светового поля надо вычислять отдельно и рассматривать его изменение при распространении. К настоящему времени известны отдельные работы, в которых приведены примеры оптических вихрей, у которых ТЗ не сохраняется при распространении.

В этой книге мы рассчитаем ТЗ асимметричных оптических вихрей и линейных суперпозиций нескольких оптических вихрей, а также покажем, как изменяется при распространении в пространстве ТЗ оптических вихрей с начальным дробным топологическим зарядом.

Подготовка материала книги и ее издание поддержана грантом РФФИ 18-29-20003.

Авторы выражают благодарность сотрудникам ИСОИ РАН к.ф.-м.н. Налимову А.Г. за помощь в расчетах, и к.ф.-м.н. Порфирьеву А.П. за помощь в проведении экспериментов.

Глава 1. Топологический заряд суперпозиции оптических вихрей

1.1 Топологическая конкуренция вихревых мод

Лазерные оптические вихри (ОВ) – это особый тип лазерных пучков, обладающих орбитальным угловым моментом (ОУМ) [1]. Исследованию ОУМ параксиальных, непараксиальных и векторных пучков посвящено множество работ, например только работы 2019 года [2-7]. Хорошо известные примеры лазерных оптических вихрей – это моды Лагерра-Гаусса [8], Бесселя [9], Бесселя-Гаусса [10], Гипергеометрические [10] и Круговые пучки [12]. Они все обладают радиальной симметрией, и все имеют одинаковый нормированный на мощность пучка ОУМ, который равен целому топологическому заряду этих пучков n . Известны и оптические вихри без круговой симметрии, у которых ОУМ разный, и для каждого типа асимметричных пучков получены разные формулы для ОУМ [13, 14]. Но кроме ОУМ оптические вихри характеризуются топологическим зарядом (ТЗ, или ТС, topological charge), определение которого дано в [15]. Расчёту ТС сложных оптических вихрей посвящено мало работ. Например, в [16] исследуется изменение ТЗ при ограничении ОВ секторными диафрагмами.

В данном разделе предпринята попытка рассчитать ТЗ для некоторых типов оптических вихрей. Показано, что ТЗ оптического вихря сохраняется при амплитудных искажениях и при смещении центра ОВ по сечению пучка-носителя. А также показано, что при линейной суперпозиции простых оптических вихрей, амплитуда которых описывается функцией $A(r)\exp(in\varphi)$, где (r, φ) – полярные координаты в сечении пучка, между ними возникает «конкуренция». ТЗ всего пучка определяется и величиной и знаком ТЗ простого вихря $+n$, $-n$, и амплитудой весовых коэффициентов в линейной комбинации.

1.1.1 Топологический заряд оптического вихря, прошедшего амплитудную маску

Рассмотрим, как изменяется ТЗ при «вырезании» из оптического вихря сектора. Оптические вихри с «вырезанным» сектором подробно исследованы в работе А.В. Воляра с соавторами [16]. Эта работа послужила толчком для исследования вопроса о сохранении топологического заряда ОВ при разного рода искажениях или преобразованиях. Определение ТЗ оптического вихря (и любого параксиального светового поля) дано в работе М.В. Берри [15]. Для произвольного светового поля с комплексной амплитудой $E(r, \varphi)$ ТЗ равен:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \quad (1.1)$$

Рассмотрим комплексную амплитуду $E(r, \varphi)$ с секторным вырезом:

$$E(r, \varphi) = A(r) \exp(in\varphi) f(\varphi), \quad (1.2)$$

где функция сектора имеет вид:

$$f(\varphi) = \begin{cases} 1, & -\alpha < \varphi < \alpha, \\ \delta \ll 1, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Подставим (1.2) в (1.1) и получим:

$$\begin{aligned} TC &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{inE(r, \varphi) + A(r)e^{in\varphi} \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi}}{E(r, \varphi)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(in + \frac{\partial f(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{1}{f(\varphi)} \right) = n. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Последнее равенство в (1.4) получается из-за того, что второе слагаемое в круглых скобках действительное. Получается, что, если диафрагма зависит только от угла φ , то ТЗ оптического вихря не меняется. Доказательство (1.4) можно просто повторить, если амплитудная диафрагма имеет произвольную форму, то есть её функция пропускания зависит и от угла φ , и от радиуса r :

$$f(\varphi) = \begin{cases} 1, & (r, \varphi) \in \Omega, \\ \delta \ll 1, & (r, \varphi) \notin \Omega, \end{cases} \quad (1.5)$$

где Ω – область пропускания диафрагмы. Тогда вместо (1.4) получим аналогично:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(in + \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial \varphi} \frac{1}{f(r, \varphi)} \right) = n. \quad (1.6)$$

В (1.3) и (1.5) введено слабое пропускание ($\delta \ll 1$) в области, где диафрагма не должна пропускать свет, чтобы в (1.4) и (1.6) избежать возникновения неопределённости $0/0$ при делении производной $\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi$ на комплексную амплитуду поля $E(r, \varphi)$. Из (1.6) следует, что умножение комплексной амплитуды ОВ (1.2) на любую действительную функцию не изменяет ТЗ исходного ОВ, так как действительная функция не изменяет аргумент комплексной амплитуды в (1.1). Оптически умножение амплитуды светового поля на действительную

функцию эквивалентно прохождению света через тонкую амплитудную маску. Заметим, что вместо условий (1.3) и (1.5) достаточно потребовать, чтобы центр сингулярности можно было обойти вдоль замкнутого контура, на котором нет нулей интенсивности.

1.1.2 Топологический заряд внеосевого оптического вихря

Рассмотрим теперь, как изменяется ТЗ при смещении центра ОВ с оптической оси пучка с радиально-симметричной амплитудой $A(r)$. Рассмотрим смещение ОВ на произвольный вектор $(r_0 \cos \varphi_0, r_0 \sin \varphi_0)$. Тогда комплексная амплитуда $E(r, \varphi)$ запишется в виде:

$$E(r, \varphi) = \left(\frac{re^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0}}{w} \right)^n A(r). \quad (1.7)$$

Подставим (1.7) в (1.1) и получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{inre^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0}} = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{inre^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0}} = n. \quad (1.8)$$

Последнее равенство в (1.8) получается из-за того, что для больших радиусов ($r \gg r_0$) в знаменателе остаётся только первое слагаемое. Из (1.8) следует, что смещение центра ОВ с оптической оси пучка с радиально-симметрично амплитудой (например, гауссова пучка) не изменяет ТЗ. Хотя нормированный на мощность ОУМ пучка со смещённым центром фазовой сингулярности меньше, чем ТЗ всего пучка и убывает с увеличением величины смещения r_0 [17, 18].

На рис. 1.1 показаны распределения интенсивности и фазы гауссова пучка с внеосевым оптическим вихрем в начальной плоскости и после распространения в пространстве для разного смещения вихря от оптической оси. Комплексная амплитуда в начальной плоскости равна

$$E(r, \varphi) = \left[(re^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0}) / w \right]^n \exp(-r^2/w^2),$$

где w – радиус перетяжки гауссова пучка, n и (r_0, φ_0) – соответственно топологический заряд оптического вихря и вектор (в полярных координатах) его смещения с оптической оси. Комплексная амплитуда после распространения в пространстве рассчитана с помощью численного преобразования Френеля, реализованного в виде свёртки на основе быстрого преобразования Фурье. Использовались следующие параметры расчёта: $w = 1$ мм, $n = 7$, $\varphi_0 = 0$, $r_0 = w/4$ (рис. 1.1а–з), $r_0 = w/2$ (рис. 1.1д–з), $r_0 = 2w$ (рис. 1.1и–м), расстояние распространения в пространстве $z = z_0/2$ ($z_0 = kw^2/2$ – расстояние Рэлея, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число), расчётная область $-R \leq x, y \leq R$ ($R = 5$ мм). Топологический заряд

в начальной плоскости, рассчитанный численно по формуле (1.1) (по окружности радиуса $0,8R$), равен $6,9997$ при $r_0 = w/4$ и $6,9995$ при $r_0 = w/2$, то есть во всех случаях примерно равен 7 . На расстоянии ТЗ оказался равен соответственно $6,9989$, $6,9989$ и $6,9986$, то есть $TC = 7$.

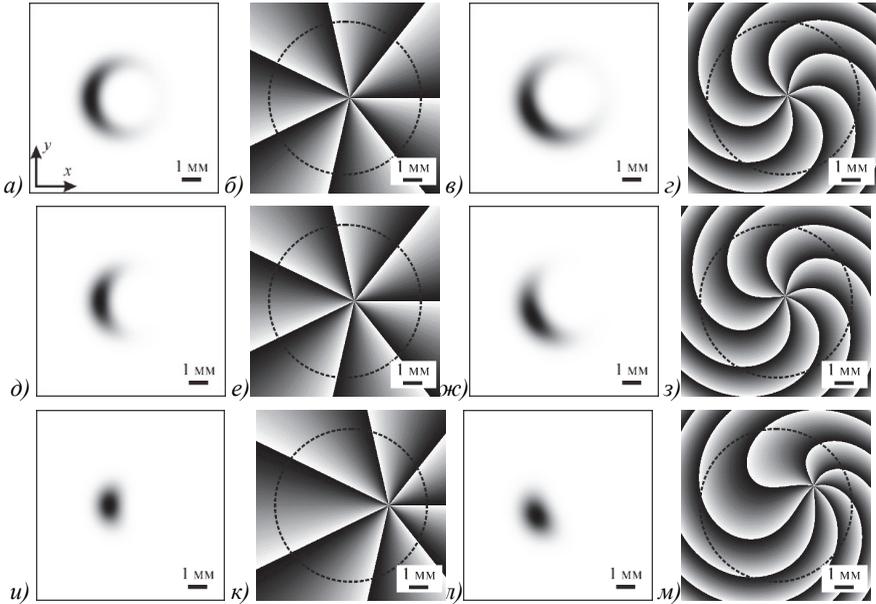


Рис. 1.1. Распределения интенсивности (а, в, д, ж, и, л) (негатив) и фазы (б, г, е, з, к, м) гауссова пучка с внеосевым оптическим вихрем в начальной плоскости (а, б, д, е, и, к) и после распространения в пространстве (в, г, ж, з, л, м) для разного поперечного смещения вихря от оптической оси. Параметры расчёта: радиус перетяжки $w = 1$ мм, топологический заряд $n = 7$, смещение $r_0 = w/4$ (а–г), $r_0 = w/2$ (д–ж), $r_0 = 2w$ (и–м); $\varphi_0 = 0$ на всех рисунках, расстояние распространения в пространстве $z = z_0/2$ (z_0 – расстояние Рэлея). Пунктирные окружности на распределениях фазы обозначают контур в формуле (1.1), по которому рассчитывался топологический заряд

1.1.3 Топологический заряд оптического вихря с несколькими центрами фазовой сингулярности

Рассмотрим случай, когда в гауссов лазерный пучок внедрены m простых (с топологическим зарядом $+1$) фазовых сингулярностей, расположенных равномерно на окружности радиуса a , то есть в точках с декартовыми координатами

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi_p, \\ y = a \sin \varphi_p, \end{cases} \quad (1.9)$$

где $\varphi_p = 2\pi p/m$, $p = 0, \dots, m - 1$. Можно показать, что комплексная амплитуда такого ОВ на любом расстоянии от перетяжки равна:

$$E(r, \varphi, z) = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0} \right)^m \exp \left(-\frac{r^2}{\sigma w_0^2} \right) \left(\frac{r^m e^{im\varphi}}{\sigma^m} - a^m \right), \quad (1.10)$$

где $\sigma = 1 + iz/z_0$, $z_0 = kw_0^2/2$ – расстояние Рэлея. Подставив в (1.1) комплексную амплитуду (1.10), получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{im\sigma^{-m} r^m e^{im\varphi}}{\sigma^{-m} r^m e^{im\varphi} - a^m} d\varphi \right\} = m. \quad (1.11)$$

Так как при $r \rightarrow \infty$ слагаемым a^m в знаменателе можно пренебречь, получаем, что ТЗ пучка (1.10) не зависит от пройденного расстояния z и от радиуса a окружности, на которой расположены центры оптических вихрей, и равен числу простых вихрей в пучке. Полученный результат можно обобщить на произвольный случай, когда центры m вихрей с кратностью m_p расположены в точках (r_p, φ_p) , где $p=0, \dots, m-1$ и несущая амплитуда имеет осевую симметрию $A(r)$. Тогда комплексная амплитуда такого сложного ОВ запишется в виде [19, 20]:

$$E(r, \varphi, z=0) = A(r) \prod_{p=0}^{m-1} (r e^{i\varphi} - r_p e^{i\varphi_p})^{m_p} \quad (1.12)$$

Подставив (1.12) в (1.1), получим

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} i r e^{i\varphi} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{m_p}{r e^{i\varphi} - r_p e^{i\varphi_p}} d\varphi \right\} = \sum_{p=0}^{m-1} m_p. \quad (1.13)$$

Из (1.13) следует, что ТЗ пучка с осесимметричной амплитудой и несколькими вырожденными простыми оптическими вихрями (1.12), центры которых расположены в произвольных точках в сечении пучка, равен сумме величин кратности (вырожденности) всех вихрей.

1.1.4 Топологический заряд осевой линейной комбинации оптических вихрей

Рассмотрим световое поле, комплексная амплитуда которого описывается линейной комбинацией конечного числа мод Лагерра-Гаусса (ЛГ) с номерами $(n, 0)$:

$$E(r, \varphi, z=0) = \exp \left(-\frac{r^2}{w^2} \right) \sum_{n=-M}^N C_n \left(\frac{r}{w} \right)^{|n|} e^{in\varphi}. \quad (1.14)$$

Подставляя (1.14) в (1.1), получим следующее выражение для ТЗ:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} i \frac{\sum_{n=-M}^N n C_n \left(\frac{r}{w}\right)^{|n|} e^{in\varphi}}{\sum_{n=-M}^N C_n \left(\frac{r}{w}\right)^{|n|} e^{in\varphi}} d\varphi \right\}. \quad (1.15)$$

В (1.15), выполняя предельный переход $r \rightarrow \infty$ под интегралом, в числителе и знаменателе под знаком суммы остаются по одному слагаемому с максимальным показателем степени.

Если $M > N$, то ТЗ (1.14) равен $TC = -M$, если $M < N$, то ТЗ (1.14) равен $TC = N$. Если $M = N$, то вместо (1.15) получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} iN \frac{(C_N e^{iN\varphi} - C_{-N} e^{-iN\varphi})}{(C_N e^{iN\varphi} + C_{-N} e^{-iN\varphi})} d\varphi \right\}. \quad (1.16)$$

Итак, если в осевой линейной комбинации из конечного числа мод ЛГ с разными ТЗ максимальный положительный ТЗ больше по амплитуде максимального отрицательного ТЗ, то ТЗ всего пучка будет равен этому положительному ТЗ ($TC = N$). Если, наоборот, максимальный по модулю отрицательный ТЗ в суперпозиции больше, чем максимальный положительный, то ТЗ всего пучка равен отрицательному ТЗ ($TC = -M$). Для случая $M = N$ в следующем разделе мы покажем, что интеграл в (1.16) вычисляется, и ТЗ (1.16), на основании (1.22), равен N , если $|C_N| > |C_{-N}|$ или $-N$, если $|C_N| < |C_{-N}|$. При равенстве этих коэффициентов $|C_N| = |C_{-N}|$ ТЗ всего пучка равен нулю.

1.1.5 Топологический заряд суммы двух гауссовых оптических вихрей

Рассмотрим простой, но интересный случай, который приводит к неожиданному результату. Пусть световое поле в начальной плоскости имеет комплексную амплитуду, которая описывает осевую суперпозицию двух гауссовых оптических вихрей с разными топологическими зарядами и разными амплитудами:

$$E(r, \varphi) = (ae^{in\varphi} + be^{im\varphi})e^{-r^2/w^2}, \quad (1.17)$$

где w – радиус перетяжки гауссова пучка, n и m – целочисленные топологические заряды оптических вихрей, a и b – весовые коэффициенты суперпозиции, в общем случае комплексные. Подставив (1.17) в (1.1), получим выражение для ТЗ:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)} d\varphi \right\} = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{nae^{in\varphi} + mbe^{im\varphi}}{ae^{in\varphi} + be^{im\varphi}} d\varphi \right\}. \quad (1.18)$$

Интеграл в правой части (1.18) можно свести к сумме двух интегралов:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{n+m}{2} + \frac{n-m}{2} \frac{|a|^2 - |b|^2}{|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos t} \right) dt. \quad (1.19)$$

Интеграл от первого слагаемого в (1.19) тривиален, а интеграл от второго слагаемого перепишем в ином виде:

$$TC = \frac{n+m}{2} + \frac{1}{2\pi} \frac{n-m}{2} \frac{|a|^2 - |b|^2}{|a|^2 + |b|^2} \int_0^{2\pi} \left(dt / \left(1 + \frac{2|a||b|}{|a|^2 + |b|^2} \cos t \right) \right). \quad (1.20)$$

Коэффициент при косинусе в знаменателе не может превышать единицу, поэтому этот интеграл является справочным (выражение 3.613.1 в [21]):

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx) dx}{1 + a \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} \left(\frac{\sqrt{1-a^2} - 1}{a} \right)^n, \quad (1.21)$$

где $a^2 < 1$, $n \geq 0$.

Если интеграл от нуля не до π , а до 2π , то это выражение надо умножить на два. Тогда (1.20) примет вид:

$$TC = \frac{n+m}{2} + \frac{n-m}{2} \frac{|a|^2 - |b|^2}{\left| |a|^2 - |b|^2 \right|}. \quad (1.22)$$

Для полноты картины запишем нормированный на мощность ОУМ для пучка (1.17):

$$OAM = \frac{na^2 + mb^2}{a^2 + b^2}. \quad (1.23)$$

Из (1.22) следует, что если $|a| > |b|$, то $TC = n$, а если $|a| < |b|$, то $TC = m$. Если $m = n$, то также получаем ожидаемый результат $TC = n$. То есть ТЗ суммарного пучка (1.17) равен ТЗ того ОВ, у которого больше амплитуда. Если $|a| = |b|$, то наступает вырождение (возникает перепутанность), и выражением (1.22) пользоваться нельзя из-за неопределённости 0/0. Поэтому преобразуем поле (1.17) при условии $|a| = |b|$ к виду:

$$\begin{aligned} E(r, \varphi) &= |a| \left(e^{in\varphi + i \arg a} + e^{im\varphi + i \arg b} \right) e^{-r^2/w^2} = \\ &= 2|a| \cos \left(\frac{n\varphi - m\varphi + \arg a - \arg b}{2} \right) \times \\ &\times \exp \left(-\frac{r^2}{w^2} + i \frac{n\varphi + m\varphi + \arg a + \arg b}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Подставив (1.24) в (1.1), получим

$$TC = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{n\varphi + m\varphi + \arg a + \arg b}{2} \right) d\varphi = \frac{n+m}{2}. \quad (1.25)$$

Из (1.25) следует, что если складываются два оптических вихря с равной амплитудой и ТЗ, чётным и нечётным, то суммарный пучок будет иметь дробный (полуцелый) ТЗ. Дробный ТЗ у лазерного пучка может существовать только в начальной (граничной) плоскости, а при распространении в пространстве ТЗ должен быть целым, чтобы амплитуда светового поля была непрерывной. Заметим, что ОУМ (1.23) будет совпадать с ТЗ (1.22) и (1.25) только при $a=0$, или $b=0$, или $a=b$. Заметим также, что в случае вырожденной ситуации ($a=b$) знание целого топологического заряда не позволяет определить, какие угловые гармоники составляют этот пучок. Действительно, например, все приведённые ниже пучки имеют одинаковый ТЗ и одинаковый ОУМ, равный 4:

$$\begin{aligned} E_1(r, \varphi) &= (e^{i\varphi} + e^{i7\varphi}) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right), \\ E_2(r, \varphi) &= (e^{i2\varphi} + e^{i6\varphi}) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right), \\ E_3(r, \varphi) &= (e^{i3\varphi} + e^{i5\varphi}) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right), \\ E_4(r, \varphi) &= e^{i4\varphi} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

На рис. 1.2а, б показаны интенсивность и фаза суперпозиции двух гауссовых вихрей в начальной плоскости при следующих параметрах расчёта: радиус перетяжки $w=1$ мм, топологические заряды $n=12$ и $m=7$, весовые коэффициенты единичны по модулю, но со случайной фазой: ($a=e^{2,9616i}$, $b=e^{0,2247i}$), расчётная область $-R \leq x, y \leq R$ ($R=1$ мм). Топологический заряд, рассчитанный численно по формуле (1.1), равен 9,4708, то есть примерно $(12+7)/2$. На рис. 1.2в, г показаны интенсивность и фаза этой же суперпозиции, но на расстоянии Рэлея (для длины волны $\lambda=532$ нм) и в более широкой расчётной области ($R=10$ мм). Топологический заряд, рассчитанный численно по формуле (1.1), равен 11,8167, то есть примерно 12. В обоих случаях топологический заряд рассчитывался путём интегрирования по окружности радиуса $0,8R$. Этот пример соответствует ситуации, описываемой амплитудой (1.32), и при равенстве модулей амплитуд $|a|=|b|$ двух вихрей, ТЗ всего пучка будет равен большему из двух ТЗ, то есть 12.

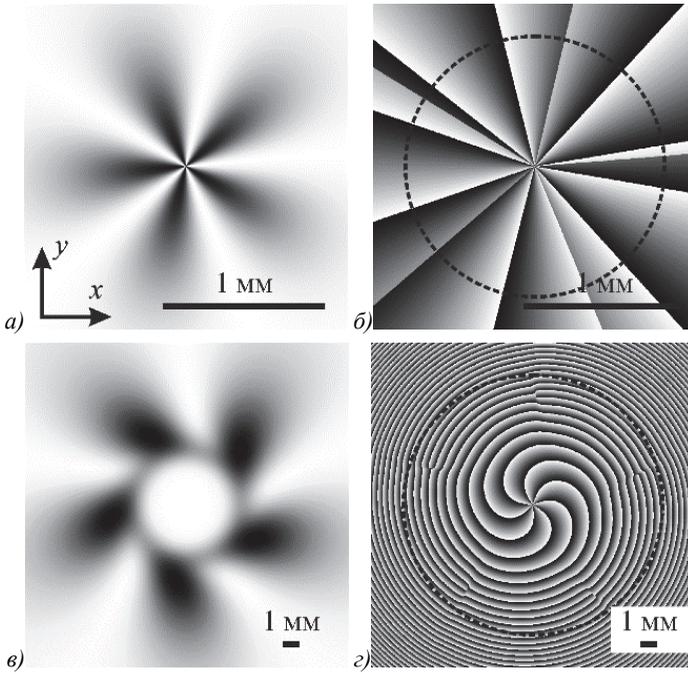


Рис. 1.2. Интенсивность (а, в) (негатив) и фаза (б, г) осевой суперпозиции двух гауссовых оптических вихрей с ТЗ 12 и 7, но с одинаковыми весовыми амплитудами ($|a| = |b|$ в (1.17)) в начальной плоскости (а, б) и на расстоянии Рэлея (в, г). Пунктирные окружности на распределениях фазы обозначают контуры, по которым рассчитывался топологический заряд по формуле (1.1)

1.1.6 Топологический заряд в произвольной плоскости

В этом разделе мы покажем, что линейная комбинация двух гауссовых оптических вихрей (1.17) с разными ТЗ, но одинаковыми амплитудными весами ($a = b$), которая приводит к полуцелому ТЗ в начальной плоскости (1.25), при распространении формирует оптический вихрь с целым ТЗ. Действительно, если в начальной плоскости имеется гауссов ОВ:

$$E(r, \varphi) = \exp(-r^2/w^2 + in\varphi), \quad (1.27)$$

то после прохождения через парааксиальную ABCD-систему его комплексная амплитуда имеет вид:

$$E_z(\rho, \theta) = (-i)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{z_0}{Bq_1} \exp\left(\frac{ikD\rho^2}{2B} + in\theta\right) \times \\ \times \sqrt{\xi} \exp(-\xi) \left[I_{\frac{n-1}{2}}(\xi) - I_{\frac{n+1}{2}}(\xi) \right], \quad (1.28)$$

где

$$\xi = \left(\frac{z_0}{B}\right)^2 \left(\frac{\rho}{w}\right)^2 \left(\frac{1}{2q_1}\right), \quad q_1 = 1 - i \frac{A}{B} z_0. \quad (1.29)$$

В (1.28) $I_\nu(x)$ – модифицированная функция Бесселя. Следовательно, в случае суперпозиции (1.17) комплексная амплитуда равна

$$E_z(\rho, \theta) = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{z_0}{Bq_1} \exp\left(\frac{ikD\rho^2}{2B}\right) \sqrt{\xi} \exp(-\xi) \times \\ \times \left\{ a(-i)^n e^{in\theta} \left[I_{\frac{n-1}{2}}(\xi) - I_{\frac{n+1}{2}}(\xi) \right] + b(-i)^m e^{im\theta} \left[I_{\frac{m-1}{2}}(\xi) - I_{\frac{m+1}{2}}(\xi) \right] \right\}. \quad (1.30)$$

Используя асимптотическое разложение модифицированной функции Бесселя и оставив в нём только первые два слагаемых, получим приближённое выражение для разности двух модифицированных функций Бесселя соседних порядков при больших значениях аргументов:

$$I_{\frac{n-1}{2}}(\xi) - I_{\frac{n+1}{2}}(\xi) \sim \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}} \left\{ 1 - \frac{1}{8\xi} \left[4\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - 1 \right] \right\} - \\ - \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}} \left\{ 1 - \frac{1}{8\xi} \left[4\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - 1 \right] \right\} = \frac{ne^\xi}{2\xi\sqrt{2\pi\xi}}. \quad (1.31)$$

Тогда (1.30) при больших значениях ξ примет вид:

$$E_z(\rho, \theta) = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{z_0}{Bq_1} \exp\left(\frac{ikD\rho^2}{2B}\right) \sqrt{\xi} \exp(-\xi) \times \\ \times \left[a(-i)^n \exp(in\theta) \frac{ne^\xi}{2\xi\sqrt{2\pi\xi}} + b(-i)^m \exp(im\theta) \frac{me^\xi}{2\xi\sqrt{2\pi\xi}} \right] = \\ = \frac{-iz_0}{4Bq_1\xi} \exp\left(\frac{ikD\rho^2}{2B}\right) \times \left[an(-i)^n \exp(in\theta) + bm(-i)^m \exp(im\theta) \right]. \quad (1.32)$$

Из (1.32) (с учётом (1.18) и (1.22)) следует, что если $|a|=|b|$, то в начальной плоскости топологический заряд равен $(m+n)/2$, но в любой другой плоскости модули коэффициентов при $e^{in\theta}$ и $e^{im\theta}$ пропорциональны $|n|$ и $|m|$, то есть уже не равны друг другу (при $n \neq m$), поэтому топологический заряд, согласно (1.22), равен $\max(n, m)$. Заметим, однако, что при равенстве в (1.32) множителей $|an|=|bm|$, опять возникает вырожденная ситуация, при которой на основании формулы (1.22) ТЗ

суммы двух оптических вихрей (1.17) при $z > 0$ равен среднему арифметическому (1.25): $TC = (n + m)/2$. Эта проблема разрешается следующим образом: если имеет место равенство $|an| = |bm|$, то это означает, что $|a| \neq |b|$ и согласно (1.22) ТЗ всего поля в начальной плоскости равен ТЗ того вихря, у которого амплитуда ($|a|$ или $|b|$) больше. А целый ТЗ в начальной плоскости сохраняется при распространении.

1.1.7 Топологический заряд для оптического вихря
с начальным дробным зарядом

Для ОВ с начальным дробным топологическим зарядом μ (μ – произвольное действительное число) в [22, 23] получена формула для дробного ОУМ такого пучка. Разложим ОВ с дробным ТЗ, который может существовать только в начальной плоскости, по оптическим вихрям с целыми топологическими зарядами n (μ – произвольное действительное число):

$$E(r, \varphi, z) = \exp(i\mu\varphi)\Psi(r, z) = \frac{e^{i\pi\mu} \sin \pi\mu}{\pi} \Psi(r, z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{\mu - n}. \quad (1.33)$$

В (1.33) функция $\Psi(r, z)$ действительная. Подставим правую часть (1.33) в общее выражение для ОУМ

$$J_z = \text{Im} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \bar{E}(r, \varphi, z) \left(\frac{\partial E(r, \varphi, z)}{\partial \varphi} \right) r dr d\varphi \quad (1.34)$$

получим:

$$J_z = W \frac{\sin^2(\pi\mu)}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{(\mu - n)^2}, \quad (1.35)$$

где W – энергия (мощность) пучка

$$W = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} E(r, \varphi, z) \bar{E}(r, \varphi, z) r dr d\varphi. \quad (1.36)$$

Ряд в правой части (1.35) можно свести к справочному ряду [21]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 \pm a^2)^2} = \frac{\pi}{4a} \left[\pm \left\{ \text{cth } \pi a \right\} \mp a \left\{ \begin{array}{l} \text{cosech}^2 \pi a \\ \text{cosec}^2 \pi a \end{array} \right\} \right], \quad (1.37)$$

с помощью которого можно получить окончательное выражение для нормированного ОУМ поля (1.33):

$$\frac{J_z}{W} = \mu - \frac{\sin 2\pi\mu}{2\pi}. \quad (1.38)$$

Из (1.38) следует, что ОУМ равен ТЗ μ только, если μ целое или полужелое число. Это согласуется с выражениями (1.23) и (1.25) для линейной комбинации только двух угловых гармоник.

Получим выражение для ТЗ оптического вихря в зоне дифракции Френеля для начального поля с дробным топологическим зарядом (1.33), но для определённости амплитудную функцию выберем в виде гауссовой. Тогда вместо (1.33) получим

$$E(r, \varphi, z = 0) = \exp \left[-i\mu\varphi - \left(\frac{r}{w} \right)^2 \right] = \frac{e^{i\pi\mu} \sin \pi\mu}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\varphi - r^2/w^2}}{\mu - n}. \quad (1.39)$$

С учётом (1.28) амплитуда оптического вихря (1.39) при любом z будет равна ($B = z, A = D = 1$):

$$E(\rho, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-iz_0}{q_1 z} \right) \exp \left(\frac{ik\rho^2}{2z} + i\pi\mu \right) \times \sin(\pi\mu) \sqrt{\xi} \exp(-\xi) \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m (\operatorname{sgn} m)^{|m|} \frac{e^{im\theta}}{\mu - m} \left[I_{\frac{|m|-1}{2}}(\xi) - I_{\frac{|m|+1}{2}}(\xi) \right], \quad (1.40)$$

где ξ определено в (1.29). Подставим (1.40) в (1.1) и при переходе к пределу в (1.1) учтём асимптотику (1.31), тогда получим выражение для расчёта ТЗ оптического вихря (1.39):

$$TC = \frac{\operatorname{Re}}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-i)^{|n|} |n| e^{in\varphi}}{\mu - n} d\varphi \right\}. \quad (1.41)$$

Выражение (1.41) замечательно тем, что известен ответ, который численно был получен в [15], но до сих пор не получен аналитически. Вычисление (1.41) можно назвать задачей Берри [15]. Правая часть (1.41) должна давать только целые ТЗ, ближайшие к величине μ :

$$TC = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \operatorname{rect}(\mu - n), \quad \operatorname{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2, \\ 0, & |x| > 1/2. \end{cases} \quad (1.42)$$

Из сравнения (1.41) и (1.42) можно сказать, что ТЗ (1.41) равен ТЗ той угловой гармоники в рядах в числителе и знаменателе, у которой весовой коэффициент по модулю больше. Это согласуется также с результатами для конечной линейной комбинации мод ЛГ (1.16) и для суммы двух угловых гармоник (1.18).

На рис. 1.3, взятом из [24], показаны распределения интенсивности на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы для оптических вихрей с начальным дробным топологическим зарядом. Видно, что на линии, проведённой под углом -45° в центре картины, находятся два нуля (две светлых линии) (рис. 1.3а) при $\mu < 2,5$ и три нуля (три светлых линии) при $\mu \geq 2,5$ (рис. 1.3б, в, г). Эксперимент на рис. 1.3 подтверждает численный результат (1.42).

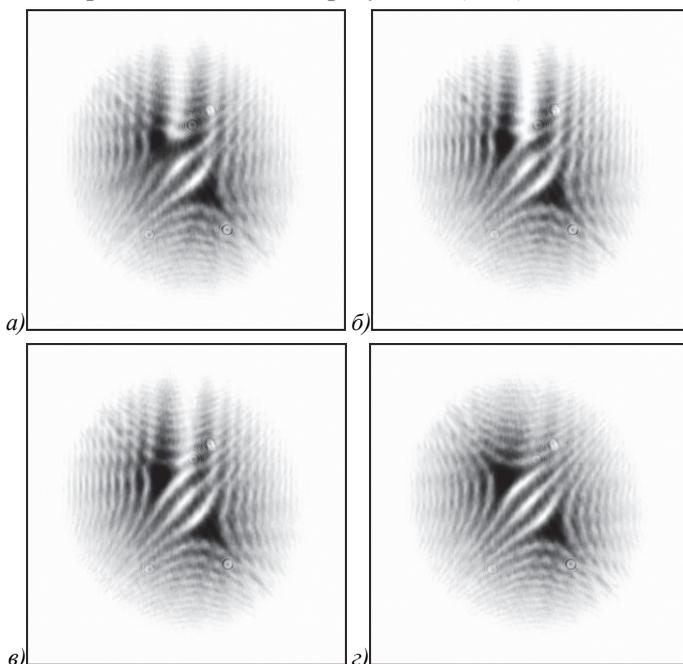


Рис. 1.3. Распределения интенсивности (негатив), измеренные на расстоянии $z = 200$ мм (на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы) от спиральной фазовой пластинки с дробным порядком: (а) $\mu = 2,3$, (б) $\mu = 2,5$, (в) $\mu = 2,7$, (г) $\mu = 2,9$. Размеры картинок 4×4 мм

1.1.8 Топологический заряд эллиптического вихря в гауссовом пучке

Рассмотрим простой пример фазового искажения оптического вихря – придание вихрю эллиптической формы. Если обычный простой оптический вихрь имеет комплексную амплитуду в начальной плоскости вида

$$E(r, \varphi) = A(r) \exp(in\varphi), \quad (1.43)$$

то комплексная амплитуда эллиптического вихря, внедрённого, например, в гауссов пучок (или любой другой пучок с радиальной симметрией) будет иметь вид:

$$E(r, \varphi) = A(r)(r \cos \varphi + i\alpha r \sin \varphi)^n = \\ = A(r)r^n (\cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi)^{n/2} \exp(in \operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} \varphi)). \quad (1.44)$$

Подставляя (1.44) в (1.1) получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} [n \operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} \varphi)] = \\ = \left(\frac{n\alpha}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi} = n. \quad (1.45)$$

Заметим, что результат, аналогичный (1.45), но только для $n=1$, ранее был получен в [25]. Из (1.45) следует, что эллиптичность оптического вихря (или эллиптичность спиральной фазовой пластинки) не изменяет ТЗ исходного простого оптического вихря (1.43). У эллиптического вихря при любой степени эллиптичности (при любом α) ТЗ равен n . При этом нормированный ОУМ эллиптического вихря всегда меньше n и равен:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{nP_{n-1}(y)}{P_n(y)} < n, \quad (1.46)$$

где $y = (1 + \alpha^2)/(2\alpha) > 1$ и $P_n(y)$ – многочлен Лежандра.

На рис. 1.4 показаны распределения интенсивности и фазы гауссова пучка с эллиптическим вихрем в начальной плоскости и после распространения в пространстве для разной эллиптичности. Комплексная амплитуда в начальной плоскости равна $E(r, \varphi) = \exp(-r^2/w^2)r^n(\cos\varphi + i\alpha\sin\varphi)^n$, где w – радиус перетяжки гауссова пучка, n и α – соответственно топологический заряд и степень эллиптичности оптического вихря. Комплексная амплитуда после распространения в пространстве рассчитана с помощью дискретного преобразования Френеля, реализованного в виде свёртки на основе быстрого преобразования Фурье. Использовались следующие параметры расчёта: $w = 1$ мм, $n = 7$, $\alpha = 1,1$ (рис. 1.4а–г), $\alpha = 1,5$ (рис. 1.4д–з), $\alpha = 3$ (рис. 1.4и, м), расстояние распространения в пространстве $z = z_0/2$ (z_0 – расстояние Рэлея), расчётная область $-R \leq x, y \leq R$ ($R = 5$ мм). Топологический заряд в начальной плоскости, рассчитанный численно по формуле (1.1) (по окружности радиуса $0,8R$), равен 6,9997 при $\alpha = 1,1$, 6,9996 при $\alpha = 1,5$, 6,9987 при $\alpha = 3$, то есть во всех случаях получилось примерно 7. На расстоянии z от начальной плоскости ТЗ оказался равен соответственно 6,9989, 6,9988 и 6,9979, то есть тоже примерно $TC = 7$.

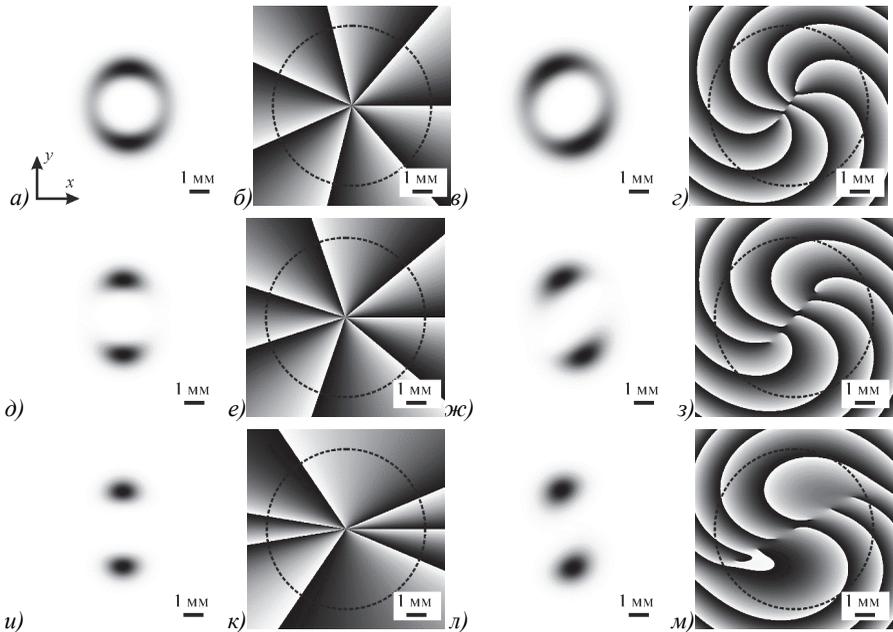


Рис. 1.4. Распределения интенсивности (негатив) (а, в, д, ж, и, л) и фазы (б, г, е, з, к, м) гауссова пучка с эллиптическим вихрем в начальной плоскости (а, б, д, е, и, к) и после распространения в пространстве (в, г, ж, з, л, м) для разной эллиптичности.

Параметры расчёта: радиус перетяжки гауссова пучка $w = 1$ мм, топологический заряд оптического вихря $n = 7$, степень эллиптичности вихря $\alpha = 1, 1, 1$ (а–г), $\alpha = 1, 5$ (д–з), $\alpha = 3$ (и–м), расстояние распространения в пространстве $z = z_0/2$ (z_0 – расстояние Рэлея). Пунктирные окружности на распределениях фазы обозначают контуры, по которым рассчитывался топологический заряд по формуле (1.1)

В этом разделе теоретически показано, что целый ТЗ оптического вихря сохраняется при ограничении ОВ любой амплитудной диафрагмой (но без нулей в функции пропускания), и при смещении ОВ с оси любого несущего осесимметричного пучка. Если в пучке имеется конечное число смещённых с оптической оси простых оптических вихрей с разными ТЗ одного знака (+1 или -1), то суммарный ТЗ всего пучка будет равен сумме всех ТЗ. Здесь нет топологической конкуренции, она возникает при осевом сложении вихрей. Так, ТЗ осевой суперпозиции, состоящей из конечного числа мод Лагерра-Гаусса с номерами $(n, 0)$, равен номеру моды с максимальным ТЗ (вместе со знаком). Если максимальные положительные и отрицательные ТЗ мод в комбинации равны, то «побеждает» тот ТЗ, у кого весовой коэффициент по модулю больше. Если и эти коэффициенты равны, то ТЗ пучка равен нулю. При осевом сложении двух гауссовых оптических вихрей с разными ТЗ и

разными амплитудами ТЗ суперпозиции будет равен ТЗ гауссова вихря с большим по модулю весовым амплитудным коэффициентом, независимо от соотношения ТЗ каждого пучка. Если весовые коэффициенты равны, возникает вырождение, и ТЗ суперпозиции равен среднему арифметическому ТЗ гауссовых вихрей. Если ТЗ у гауссовых вихрей равны чётному и нечётному числам, то ТЗ суперпозиции в начальной плоскости равен полуцелому числу. При распространении вырождение снимается и ТЗ всего пучка равен большему (положительному) целому ТЗ. Этот эффект мы назвали топологической конкуренцией оптических вихрей. Численное моделирование и эксперимент подтверждают теоретические предсказания.

1.2 Топологический заряд оптических вихрей без радиальной симметрии

Лазерные вихревые пучки [26] или оптические вихри (ОВ) интенсивно исследуются в настоящее время, так как применяются при решении многих задач оптики. ОВ применяются в квантовой информатике [27] и криптографии [28], системах беспроводной связи [29], при передаче информации по волокну [30], при генерации второй гармоники [31], в интерферометрии коротких импульсов [32], при зондировании сред с турбулентностью [33]. Вихревые пучки характеризуются двумя основными параметрами: топологическим зарядом (ТЗ) [15] и орбитальным угловым моментом (ОУМ) [1]. Обе эти характеристики описывают разные стороны ОВ. ТЗ зависит только от фазы светового поля, а ОУМ зависит как от фазы, так и от амплитуды (интенсивности). Измерять ТЗ можно с помощью цилиндрической линзы [24] или треугольной диафрагмы [34]. ОУМ можно измерять также с помощью цилиндрической линзы [6, 35]. ОУМ-спектр оптических вихрей, то есть энергетический вклад в каждую угловую гармонику, содержащуюся в лазерном пучке, можно измерять с помощью многопорядкового дифракционного оптического элемента [36] или с помощью моментов интенсивности [16, 37]. Для ОВ с радиальной симметрией (например, пучки Лагерра-Гаусса (ЛГ) [8], Бесселя-Гаусса (БГ) [10]), комплексную амплитуду которых можно представить в виде $E(r, \varphi, z) = A(r, z) \exp(in\varphi)$, где $A(r, z)$ – радиальная составляющая комплексной амплитуды пучка, n – топологический заряд пучка, (r, φ, z) – цилиндрические координаты, ТЗ равен нормированному на мощность пучка ОУМ и равен n . Причем для радиальных ОВ с целым ТЗ он сохраняется при распространении пучка в пространстве. Для других вихревых пучков ТЗ нужно вычислять отдельно. Если ОУМ пучка сохраняется при распространении и его можно вычислять в начальной плоскости, то ТЗ не всегда сохраняется. Например, ТЗ комбинированного пучка, состоящего из двух мод

Лагерра-Гаусса с разными радиусами перетяжки гауссова пучка не сохраняется [38].

В этом разделе рассматривается ТЗ некоторых вихревых лазерных пучков, не обладающих радиальной симметрией. Эти пучки были ранее рассмотрены авторами, и для них были найдены нормированные ОУМ, но ТЗ этих пучков не рассматривался. Мы найдем ТЗ для асимметричного пучка Лагерра-Гаусса [14], асимметричного пучка Бесселя-Гаусса [39], асимметричного пучка Куммера [40], суммы двух мод Эрмита-Гаусса [41] и вихревого пучка Эрмита-Гаусса [42].

В [43] мы уже рассматривали ТЗ некоторых видов оптических вихрей без круговой симметрии, которая появлялась в результате ограничения асимметричной диафрагмой, поперечного смещения оптического вихря, соосной интерференции оптического вихря с другими осевыми вихрями или с гауссовым пучком, или растяжения винтовой фазы по одной декартовой координате. В данном разделе мы рассмотрим ТЗ пучков, асимметрия которых вызвана либо поперечным смещением их комплексной амплитуды на мнимое расстояние, либо суперпозицией невихревых пучков Эрмита-Гаусса.

1.2.1 Топологический заряд асимметричного пучка Лагерра-Гаусса

При распространении в свободном пространстве на произвольном расстоянии z комплексная амплитуда асимметричного пучка ЛГ (аЛГ-пучка) [14] имеет вид:

$$E(x, y, z) = \frac{w(0)}{w(z)} \left[\frac{\sqrt{2}}{w(z)} \right]^n \left[(x - x_0) + i(y - y_0) \right]^n L_m^n \left[\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right] \times \exp \left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)} + \frac{ik\rho^2}{2R(z)} - i(n + 2m + 1)\zeta(z) \right], \quad (1.47)$$

где

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \\ w(z) &= w\sqrt{1 + (z/z_R)^2}, \\ R(z) &= z \left[1 + (z/z_R)^2 \right], \\ \zeta(z) &= \arctg(z/z_R), \end{aligned} \quad (1.48)$$

где (x, y, z) и (r, φ, z) – декартовы и цилиндрические координаты, (x_0, y_0) – комплексные координаты смещения центра пучка ЛГ, w – ра-

диус перетяжки гауссова пучка, n – ТЗ оптического вихря, $L_m^n(x)$ – присоединённый многочлен Лагерра, $z_R = kw^2/2$ – расстояние Рэлея, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число света с длиной волны λ . В поперечном сечении интенсивность такого пучка не имеет радиальной симметрии, как у обычных пучков ЛГ [8]. Если (x_0, y_0) – действительные числа, то пучок (1.47) становится обычной модой ЛГ, смещенной с оптической оси.

В дальнейшем мы будем сравнивать полученные в этой работе ТЗ различных ОВ с их ОУМ, которые были получены ранее. Для этого приведем здесь выражения, по которым рассчитывается ОУМ парааксиальных лазерных пучков и мощность пучка [14]:

$$J_z = \text{Im} \iint_{\mathbb{R}^2} E^* \left(x \frac{\partial E}{\partial y} - y \frac{\partial E}{\partial x} \right) dx dy, \quad (1.49)$$

$$W = \iint_{\mathbb{R}^2} E^* E dx dy. \quad (1.50)$$

Нормированный на мощность ОУМ аЛГ-пучка имеет вид [14]:

$$\frac{J_z}{W} = n + \frac{2 \text{Im}(x_0^* y_0)}{w^2} \left[\frac{L_m^1 \left(\frac{Q^2}{2w^2} \right)}{L_m \left(\frac{Q^2}{2w^2} \right)} + \frac{L_{m+n}^1 \left(\frac{Q^2}{2w^2} \right)}{L_{m+n} \left(\frac{Q^2}{2w^2} \right)} - 1 \right]. \quad (1.51)$$

где

$$Q = 2i \sqrt{(\text{Im} x_0)^2 + (\text{Im} y_0)^2}. \quad (1.52)$$

Увеличение или уменьшение нормированного ОУМ по сравнению с величиной ТЗ n полностью определяется знаком величины $\text{Im}(x_0^* y_0)$, так как выражение в квадратных скобках (1.51) всегда больше или равно 1. Рассчитаем ТЗ аЛГ-пучка (1.47) по формуле Берри [15]:

$$TC = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \quad (1.53)$$

Выберем комплексное смещение в (1.48) в виде $x_0 = aw$, $y_0 = iaw$, тогда множитель в (1.47) $[(x - x_0) + (y - y_0)]^n$ будет иметь простой вид $r^n e^{in\varphi}$, а переменная ρ^2 в (1.48) будет иметь следующий вид: $\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 - 2awr e^{i\varphi}$, где a – безразмерная константа, от величины которой зависит асимметрия пучка. С учетом этих замечаний, производная по углу φ от функции (1.47) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(r, \varphi, z)}{\partial \varphi} = inE(r, \varphi, z) - \left[-\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right] (2iawre^{i\varphi}) E(r, \varphi, z) - \\ - \frac{4iawre^{i\varphi}}{w^2(z)} \frac{1}{L_m^n(\xi)} \frac{d}{d\xi} L_m^n(\xi) E(r, \varphi, z), \end{aligned} \quad (1.54)$$

где $\xi = 2\rho^2/w^2(z)$.

Подставим (1.54) в (1.53), получим:

$$\begin{aligned} TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ in - \left[-\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right] (2iarwe^{i\varphi}) - \right. \\ \left. - \frac{i4awre^{i\varphi}}{w^2(z)} \frac{1}{L_m^n(\xi)} \frac{\partial L_m^n(\xi)}{\partial \xi} E(r, \varphi, z) \right\} = n + \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Re} \left[\left(-\frac{2}{w^2(z)} + \frac{ik}{R(z)} \right) raw \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\varphi} \right] \\ - \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{2rnawe^{i\varphi}}{r(r-2awe^{i\varphi})} = n. \end{aligned} \quad (1.55)$$

При получении третьего слагаемого в (1.55) при переходе к пределу $r \rightarrow \infty$ воспользовались асимптотикой для присоединенных многочленов Лагерра $[L_m^n(x)]^{-1} \partial L_m^n(x) / \partial x \approx n/x$ (так как число нулей у многочлена конечно, мы выбираем радиус окружности r , за которой полином не обращается в нуль). Третье слагаемое в (1.55) при переходе к пределу $r \rightarrow \infty$ равно нулю, так как в знаменателе вторая степень, а в числителе первая степень радиальной переменной r . Второе слагаемое в (1.55) тоже равно нулю, но по другой причине. Хотя в числителе во втором слагаемом в качестве множителя присутствует радиальная переменная r , которая стремится к бесконечности, но в числителе также есть интеграл по углу φ от экспоненты $\exp(i\varphi)$ от 0 до 2π , который равен нулю. Таким образом, из (1.55) следует, что ТЗ асимметричной моды ЛГ будет равен n . То есть комплексное смещение координат для обычной моды ЛГ приводит к изменению ее формы (1.47), изменению ее ОУМ (1.51), но не изменяет ее ТЗ (1.55). Заметим также, что ТЗ аЛГ-пучка (1.47), равный n , сохраняется при распространении, так как расчет (1.55) был сделан при любом z .

1.2.2 Топологический заряд асимметричного пучка Бесселя-Гаусса

Запишем комплексную амплитуду пучка Бесселя-Гаусса (БГ-пучки) [10] в начальной плоскости $z=0$:

$$E_n(r, \varphi, z=0) = \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2} + in\varphi\right) J_n(\alpha r), \quad (1.56)$$

где $\alpha = k \sin \theta_0 = (2\pi/\lambda)\sin \theta_0$ – масштабирующий множитель, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число света с длиной волны λ , θ_0 – угол конической волны, формирующей пучок Бесселя. В любой другой плоскости z комплексная амплитуда (1.56) будет иметь вид:

$$E_n(r, \varphi, z) = q^{-1}(z) \exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2 q(z)} + in\varphi\right) J_n\left[\frac{\alpha r}{q(z)}\right], \quad (1.57)$$

где $q(z) = 1 + iz/z_0$, $z_0 = k\omega_0^2/2$ – длина Рэлея, ω_0 – радиус перетяжки гауссова пучка, $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка. Комплексная амплитуда асимметричного пучка Бесселя-Гаусса (аБГ-пучок) имеет вид [39]:

$$E_n(r, \varphi, z; c) = \frac{1}{q(z)} \left[\frac{\alpha r}{\alpha r - 2cq(z) \exp(i\varphi)} \right]^{n/2} \exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{q(z)\omega_0^2} + in\varphi\right) \times J_n\left\{q^{-1}(z)\sqrt{\alpha r [\alpha r - 2cq(z) \exp(i\varphi)]}\right\}. \quad (1.58)$$

В (1.58) c – это безразмерная постоянная, от которой зависит асимметрия аБГ-пучка. Пучок аБГ (1.58), в отличие от аЛГ-пучка (1.47), получен не с помощью комплексного смещения координат, а с помощью суперпозиции обычных бесселевых пучков, которая математически выражается с помощью справочного ряда [39]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} J_{k+v}(x) = x^{v/2} (x-2t)^{-v/2} J_v\left(\sqrt{x^2-2tx}\right). \quad (1.59)$$

Можно получить выражение для ОУМ для аБГ-пучка, нормированного на мощность [39]:

$$\frac{J_z}{W} = n + \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p} p I_{n+p}(y)}{(p!)^2} \right] \cdot \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p} I_{n+p}(y)}{(p!)^2} \right]^{-1}, \quad (1.60)$$

где $y = (\alpha\omega_0/2)^2$. Выражение (1.60) дальше упростить не удастся. Из (1.60) следует, что ОУМ аБГ-пучков больше n , так как все слагаемые рядов в (1.60) положительные. То есть с ростом параметра c , растет асимметрия аБГ-пучка и почти линейно растет его ОУМ. Из четырёх возможных причин увеличения ОУМ (рост топологического заряда, смещение центра тяжести, астигматизм и анизотропия среды) в данном случае ОУМ возрастает из-за смещения центра тяжести, так как, согласно (1.58), оптический вихрь остаётся на оптической оси, а согласно

(1.59) с ростом асимметрии большой вклад начинают давать моды Бесселя высших порядков, у которых главное кольцо интенсивности имеет большой радиус, что приводит к удалению центра тяжести пучка от оптической оси.

Найдем ТЗ аБГ-пучка (1.58) по формуле (1.53). Но сначала выпишем производную от функции (1.58) по азимутальному углу (пусть $J_n(x) \neq 0$, чтобы не делить на ноль):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_n(r, \varphi, z; c)}{\partial \varphi} &= inE_n(r, \varphi, z; c) + \frac{incq(z)e^{i\varphi}}{\alpha r - 2cq(z)e^{i\varphi}} E_n(r, \varphi, z; c) - \\ &- \frac{ic(\alpha r)^{1/2} e^{i\varphi}}{[\alpha r - 2cq(z)e^{i\varphi}]^{1/2}} J_n^{-1}(x) \frac{\partial J_n(x)}{\partial x} E_n(r, \varphi, z; c), \end{aligned} \quad (1.61)$$

где $x = q^{-1}(z) \{ \alpha r [\alpha r - 2cq(z) \exp(i\varphi)] \}^{1/2}$. Тогда (1.53) примет вид:

$$\begin{aligned} TC &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left\{ n + \frac{ncq(z)e^{i\varphi}}{\alpha r - 2cq(z)e^{i\varphi}} - \frac{c(\alpha r)^{1/2} e^{i\varphi}}{[\alpha r - 2cq(z)e^{i\varphi}]^{1/2}} \frac{1}{J_n(x)} \frac{\partial J_n(x)}{\partial x} \right\} d\varphi = \\ &= n + \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[\frac{cJ_n^{-1}(\alpha r)}{2\pi} J_n'(\alpha r) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\varphi} \right] = n. \end{aligned} \quad (1.62)$$

В (1.62) второе слагаемое под интегралом стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$, так как в знаменателе стоит первая степень радиальной переменной r . Третье слагаемое преобразуется в слагаемое, которое также равно нулю, но по другой причине. В третьем слагаемом в (1.62) присутствует отношение производной от функции Бесселя к самой функции Бесселя (функции Бесселя вынесены из интеграла, потому что при больших значениях r верно неравенство $|\alpha r| \gg |2cq(z)|$ и потому слагаемым $2cq(z)e^{i\varphi}$ в аргументе функции Бесселя мы пренебрегли). При $r \rightarrow \infty$ это отношение может быть любым числом, так как асимптотики функции Бесселя и ее производной при большом аргументе имеют вид:

$$\begin{aligned} J_n(x \gg 1) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ \frac{dJ_n}{dx}(x \gg 1) &\approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned} \quad (1.63)$$

а их отношение является тангенсом. Но также в третьем слагаемом в (1.62) присутствует интеграл по углу φ от экспоненты $\exp(i\varphi)$ от 0 до 2π , который равен нулю. Поэтому и все третье слагаемое в (1.62) будет равно нулю. Из (1.62) следует, что при любой степени асимметрии (при

любом c) и на любом расстоянии от начальной плоскости (при любом z) у аБГ-пучка ТЗ будет равен n . Хотя ОУМ такого пучка будет увеличиваться с ростом степени асимметрии (1.60).

1.2.3 Топологический заряд асимметричного пучка Куммера

В [40] рассмотрены асимметричные пучки Куммера (аК-пучки), являющиеся точными решениями параксиального уравнения Гельмгольца. Комплексная амплитуда аК-пучка получается путем смещения в комплексную плоскость координат ($x \rightarrow x - aw$, $y \rightarrow y - iaw$, где a – безразмерная действительная величина) обычного гипергеометрического пучка (или обычного пучка Куммера) [40] при любом z :

$$E_s(r, \varphi, z) = \frac{(-i)^{n+1}}{n!} \left(\frac{z_0}{zq(z)} \right) q^{-(m+i\gamma)/2}(z) \Gamma\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}\right) \left(\frac{kwr}{2z\sqrt{q(z)}} \right)^n \times \exp\left(in\varphi + \frac{iks^2}{2z}\right) {}_1F_1\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}, n+1, -\xi\right), \quad (1.64)$$

где $s^2 = r(r - 2awe^{i\varphi})$, $\xi = (kws)^2/[4z^2q(z)]$, а ${}_1F_1(a, b, z)$ – функция Куммера (вырожденная гипергеометрическая функция). В начальной плоскости ($z=0$) комплексная амплитуда (1.64) смещенного пучка Куммера принимает вид:

$$E_s(r, \varphi, z=0) = \frac{r^n e^{in\varphi}}{w^n} \left(\frac{s}{w} \right)^{m-n+i\gamma} \exp\left(-\frac{s^2}{w^2}\right), \quad (1.65)$$

Производная от функции (1.65) по углу φ имеет вид:

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = inE - (m - n + i\gamma) \frac{irawe^{i\varphi}}{s^2} E + \frac{2irae^{i\varphi}}{w} E. \quad (1.66)$$

Подставим (1.66) в (1.53), получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(in - \frac{i(m-n+i\gamma)rawe^{i\varphi}}{r(r-2awe^{i\varphi})} + \frac{2irae^{i\varphi}}{w} \right) = n + \frac{ar}{\pi w} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = n. \quad (1.67)$$

Из трех слагаемых под интегралом в (1.67) первое равно n , второе слагаемое после перехода к пределу $r \rightarrow \infty$ равно нулю, так как в знаменателе стоит квадрат, а в числителе первая степень радиальной переменной r . Третье слагаемое тоже равно нулю, так как интеграл по углу на периоде от косинуса равен точно нулю, хотя и умножается этот ин-

теграл на величину стремящуюся к бесконечности ($r \rightarrow \infty$). Таким образом, ТЗ асимметричного пучка Куммера в начальной плоскости равен n . С помощью (1.64) аналогично можно показать, что ТЗ (1.64) при любом z будет равен n .

1.2.4 Топологический заряд оптического вихря в виде суммы двух мод Эрмита-Гаусса

В [41] было показано, что при сложении двух пучков Эрмита-Гаусса (ЭГ) с номерами $(n, n+1)$ и $(n+1, n)$ и с фазовым сдвигом на $\pi/2$ формируется оптический вихрь с орбитальным угловым моментом пропорциональным номеру $(n+1)$. В этом разделе мы найдем топологический заряд такого ОВ. Пусть комплексная амплитуда композиции двух пучков ЭГ в начальной плоскости ($z = 0$) имеет вид:

$$E(x, y, 0) = \exp\left[-\frac{w^2}{2}(x^2 + y^2)\right] \times \left[H_n(wx)H_{n+1}(wy) + i\gamma H_{n+1}(wx)H_n(wy) \right], \quad (1.68)$$

где $w = \sqrt{2}/w_0$, w_0 – радиус перетяжки гауссова пучка. Постоянную γ положим равной единице. Для светового поля (1.68) можно получить нормированный ОУМ для любого целого n [41]:

$$\frac{J_z}{W} = -(n+1). \quad (1.69)$$

Заметим, что из-за того, что сумма номеров обеих мод в (1.68) одинакова, то линейная комбинация (1.68) будет являться модой (фазы Гоу $(m+n+1)\arctg(z/z_0)$ у обоих мод тоже одинаковые) и при распространении будет сохранять свой вид, меняясь только масштабно.

Прежде, чем вычислять ТЗ по формуле (1.53), ответ можно предсказать сразу. Действительно, первое слагаемое в (1.68) имеет n вертикальных линий нулей и $(n+1)$ горизонтальных линий нулей. А второе слагаемое в (1.68), наоборот, имеет $(n+1)$ вертикальных линий нулей (которые не совпадают с вертикальными линиями нулей первого слагаемого) и n горизонтальных линий нулей. Поэтому амплитуда (1.68) будет равна нулю в точках пересечения горизонтальных и вертикальных линий. Точек пересечения с амплитудой вблизи нуля $x+iy$ будет n^2 , а точек пересечения с амплитудой вблизи нуля $y+ix$ будет $(n+1)^2$. Поэтому ТЗ поля (1.68) будет равен $TC = n^2 - (n+1)^2 = -(2n+1)$.

Для определения ТЗ пучка по его комплексной амплитуде (1.68), представим моды ЭГ в (1.68) через моды ЛГ (выражение (3.11) в [21]):

$$i^m H_n(\xi) H_m(\eta) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n+m)/2 \rfloor} (-2)^k k! P_k^{(n-k, m-k)}(0) \times \\ \times \left[(\xi + i\eta)^{n+m-2k} + (-1)^m (\xi - i\eta)^{n+m-2k} \right] \times L_k^{n+m-2k}(\xi^2 + \eta^2), \quad (1.70)$$

где P – многочлены Якоби, а штрих у знака суммы означает, что при чётных n и m последнее слагаемое надо разделить пополам.

Произведения полиномов Эрмита из (1.68) тогда имеют вид:

$$H_n(wx) H_{n+1}(wy) = i^{-n-1} \sum_{k=0}^n (-2)^k k! P_k^{(n-k, n+1-k)}(0) \times \\ w^{2n+1-2k} L_k^{2n+1-2k}(w^2 x^2 + w^2 y^2) \left[(x + iy)^{2n+1-2k} + (-1)^{n+1} (x - iy)^{2n+1-2k} \right], \quad (1.71)$$

$$H_{n+1}(wx) H_n(wy) = i^{-n} \sum_{k=0}^n (-2)^k k! P_k^{(n+1-k, n-k)}(0) \times \\ w^{2n+1-2k} L_k^{2n+1-2k}(w^2 x^2 + w^2 y^2) \left[(x + iy)^{2n+1-2k} + (-1)^n (x - iy)^{2n+1-2k} \right]. \quad (1.72)$$

Используя эти выражения, перепишем (1.68) в полярных координатах:

$$E(r, \varphi, 0) = (-i)^{n+1} \exp\left(-\frac{w^2 r^2}{2}\right) \sum_{k=0}^n (-2)^k k! (wr)^{2n+1-2k} L_k^{2n+1-2k}(w^2 r^2) \times \\ \times \left[A_k^- e^{i(2n+1-2k)\varphi} - (-1)^n A_k^+ e^{-i(2n+1-2k)\varphi} \right]. \quad (1.73)$$

где $A_k^\pm = P_k^{(n-k, n+1-k)}(0) \pm P_k^{(n+1-k, n-k)}(0)$.

Получилась суперпозиция конечного числа мод ЛГ. Согласно [43], ТЗ такой суперпозиции равен ТЗ моды наивысшего (по модулю) порядка. В (1.73) таких мод две (при $k=0$), поэтому ТЗ такой суперпозиции равен либо $2(n+1)$, либо $-2(n+1)$, в зависимости от того, у какой моды больше весовой коэффициент. Для полиномов Якоби известно свойство:

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(-z) = (-1)^k P_k^{(\beta, \alpha)}(z). \quad (1.74)$$

Поэтому $P_0^{(n, n+1)}(0) = P_0^{(n+1, n)}(0)$ и весовой коэффициент A_0^- при моде ЛГ порядка $2(n+1)$ равен нулю. Следовательно,

$$TC = -(2n+1). \quad (1.75)$$

1.2.5 Топологический заряд вихревого пучка Эрмита-Гаусса

В [42] показано, что, если сложить не две моды ЭГ, а несколько, используя справочное выражение из [21]

$$\sum_{k=0}^n \frac{n! t^k}{k!(n-k)!} H_k(x) H_{n-k}(y) = (1+t^2)^{n/2} H_n\left(\frac{tx+y}{\sqrt{1+t^2}}\right), \quad (1.76)$$

то можно получить вихревой пучок Эрмита-Гаусса, комплексная амплитуда которого имеет вид:

$$U_n(x, y, z) = i^n \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) (1-a^2)^{n/2} H_n\left(\frac{iax+y}{\sqrt{1-a^2}}\right). \quad (1.77)$$

Так как в (1.76) сумма номеров ЭГ-мод постоянная $k+(n-k)=n=\text{const}$, то все ЭГ-моды в линейной комбинации (1.76) имеют одинаковую фазовую скорость (одинаковые фазы Гюй $(n+m+1)\text{arctg}(z/z_0)$), и поэтому весь пучок (1.77) тоже является параксиальной модой и распространяется без изменения поперечной структуры интенсивности (с точностью до масштаба и вращения). Орбитальный угловой момент пучка (1.77) выражается формулой [42]:

$$\frac{J_z}{I} = -\frac{2an}{1+a^2}. \quad (1.78)$$

Постоянный параметр a в (1.77) и (1.78) можно связать с углом поворота α цилиндрической линзы, которая преобразует пучок Эрмита-Гаусса с номером $(0, n)$ в вихревой пучок ЭГ (1.77):

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \\ \sin \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Найдем ТЗ вихревого пучка ЭГ (1.77). Для этого подставим выражение (1.77) в формулу (1.53), получим:

$$\begin{aligned} TC &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)} = \\ &= \frac{n}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} [H_n(ir \cos \varphi \cos \alpha + r \sin \varphi \sin \alpha)]^{-1} \times \\ &\times H_{n-1}(ir \cos \varphi \cos \alpha + r \sin \varphi \sin \alpha) (-ir \sin \varphi \cos \alpha + r \cos \varphi \sin \alpha) d\varphi. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Перейдем к пределу $r \rightarrow \infty$ в (1.80) и заменим многочлены Эрмита на одночлены с максимальной степенью

$$H_n(x \gg 1) \approx (2x)^n.$$

Тогда вместо (1.80) получим:

$$\begin{aligned}
 TC &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{n(-i \sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha)}{(i \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha)} = \\
 &= \frac{-n}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\tan \alpha}{\cos^2 \varphi + \tan^2 \alpha \sin^2 \varphi} = -n.
 \end{aligned} \tag{1.81}$$

При получении (1.81) воспользовались справочным интегралом [21]:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi + \gamma^2 \sin^2 \varphi} = \frac{2\pi}{\gamma}. \tag{1.82}$$

Сравнивая выражения для ОУМ (1.76) и ТЗ (1.79) для вихревого пучка ЭГ, видно, что ТЗ пучка не зависит от параметра a или от угла наклона α цилиндрической линзы (1.79), а ОУМ зависит от этого параметра. Поэтому обе характеристики (ОУМ и ТЗ) одинаково важны для описания вихревых пучков.

1.2.6 Моделирование

На рис. 1.5 показаны распределения интенсивности и фазы асимметричного пучка Бесселя-Гаусса в трёх поперечных плоскостях: $z=0$ (в начальной плоскости) (рис. 1.5а, з), $z=z_0$ (на расстоянии Рэлея) (рис. 1.5б, д) и $z=10z_0$ (в дальней зоне) (рис. 1.5в, е). Видно, что в начальной плоскости кроме оптического вихря 8-го порядка имеется множество оптических вихрей 1-го порядка. На расстоянии Рэлея такой вихрь всего один (в нижней левой части рис. 1.5д). В дальней зоне остаётся только центральный вихрь 8-го порядка. Поэтому при расчёте ТЗ были получены значения 11,9926 (при $z=0$), 8,8837 (при $z=z_0$) и 7,9393 (при $z=10z_0$).

Аналогично, на рис. 1.6 показаны распределения интенсивности и фазы асимметричного пучка Лагерра-Гаусса в трёх поперечных плоскостях: $z=0$ (в начальной плоскости) (рис. 1.6а, з), $z=z_0$ (на расстоянии Рэлея) (рис. 1.6б, д) и $z=10z_0$ (в дальней зоне) (рис. 1.6в, е). Видно, что в начальной плоскости кроме оптического вихря 8-го порядка имеется несколько оптических вихрей первого порядка. На расстоянии Рэлея таких вихрей несколько (отчётливо видны три вихря слева от центра рис. 1.5д). В дальней зоне остаётся только центральный вихрь 8-го порядка. При расчёте ТЗ были получены значения 7,9974 (при $z=0$), 7,9925 (при $z=z_0$) и 7,9226 (при $z=10z_0$).

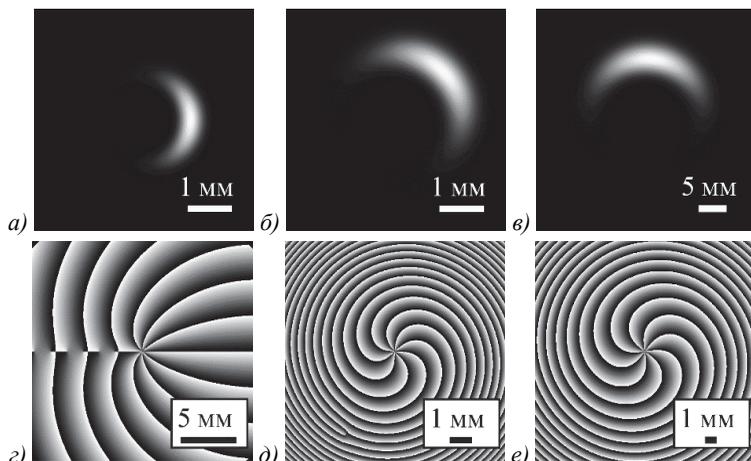


Рис. 1.5. Распределения интенсивности (а, б, в) и фазы (з, д, е) аБГ-пучка в трёх разных плоскостях. Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, порядок оптического вихря $n = 8$, масштабный множитель $\alpha = 1/w_0$, параметр асимметрии $c = w_0/40$, расстояние распространения $z = 0$ (начальная плоскость) (а, з), $z = z_0$ (на расстоянии Рэлея) (б, д), и $z = 10z_0$ (в дальней зоне) (в, е), расчётная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 10$ мм ($z = 0$), $R = 10$ мм ($z = z_0$), $R = 20$ мм ($z = 10z_0$), число отсчётов 2048×2048 . ТЗ рассчитывался вдоль окружности $x^2 + y^2 = R_1^2$, где $R_1 = 0,8R$. Полученные значения равны 11,9926 (а, з), 8,8837 (б, д), и 7,9393 (в, е)

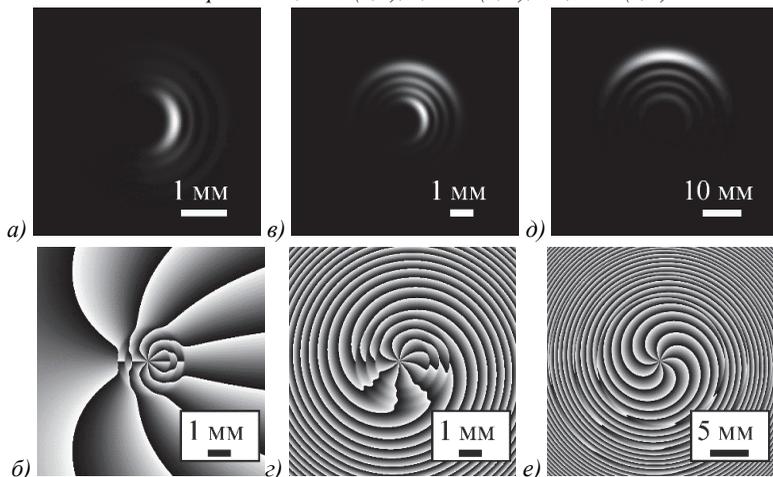


Рис. 1.6. Распределения интенсивности (а, б, в) и фазы (з, д, е) аЛГ-пучка в трёх разных плоскостях. Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, порядок оптического вихря $n = 8$, радиальный индекс моды $t = 3$, вектор смещения $(x_0, y_0) = (0, iw_0/4)$, расстояние распространения $z = 0$ (начальная плоскость) (а, з), $z = z_0$ (на расстоянии Рэлея) (б, д), и $z = 10z_0$ (дальняя зона) (в, е), расчётная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 5$ мм ($z = 0$), $R = 5$ мм ($z = z_0$), $R = 30$ мм ($z = 10z_0$), число отсчётов 2048×2048 . ТЗ рассчитывался по окружности $x^2 + y^2 = R_1^2$, где $R_1 = 0,8R$. Полученные значения равны 7,9974 (а, з), 7,9925 (б, д), и 7,9226 (в, е)

На рис. 1.7 показаны распределения интенсивности и фазы асимметричного пучка Куммера в трёх поперечных плоскостях: $z=0$ (в начальной плоскости) (рис. 1.7а, б), $z=z_0$ (на расстоянии Рэлея) (рис. 1.7в, г) и $z=10z_0$ (в дальней зоне) (рис. 1.7д, е). Видно, что, несмотря на асимметричное распределение интенсивности, во всех плоскостях в центре имеется оптический вихрь первого порядка. При расчёте ТЗ были получены значения 0,9981 (при $z=0$), 0,9992 (при $z=z_0$) и 0,9999 (при $z=10z_0$).

На рис. 1.8 показаны распределения интенсивности и фазы суммы двух мод Эрмита-Гаусса в начальной плоскости. Видно, что, несмотря на большое количество изолированных нулей, почти все они компенсируют друг друга (вихри первого и минус первого порядка) и на бесконечности остаётся лишь небольшое число скачков фазы. Это следует из того, что при обходе по контуру вблизи края рис. 1.8в (против часовой стрелки) имеется ровно 11 скачков фазы на -2π (показаны стрелками). При расчёте ТЗ было получено значение $-10,9550$, что соответствует теоретическому значению $-(2n+1)$ при $n=5$.

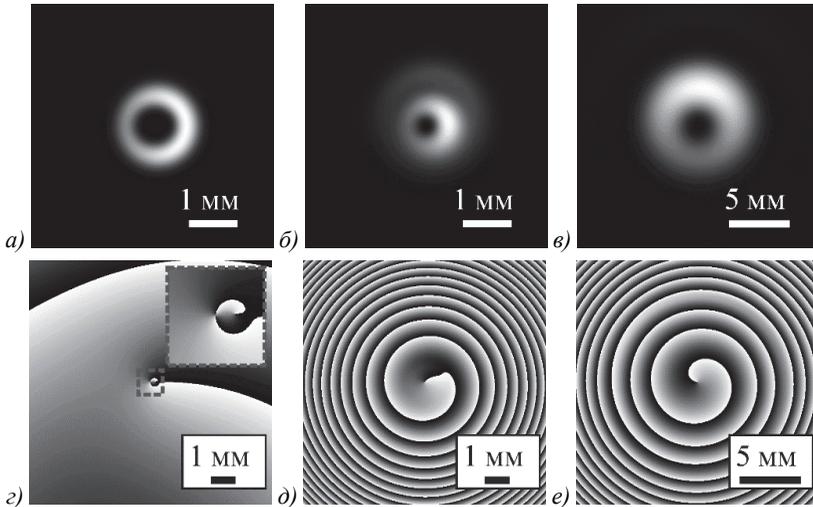


Рис. 1.7. Распределения интенсивности (а, б, в) и фазы (г, д, е) асимметричного пучка Куммера в трёх разных плоскостях. Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w_0 = 0,5$ мм, порядок оптического вихря $n = 1$, параметры t и γ равны $t = 3$ и $\gamma = 0$, параметр смещения $a = 0,2$, расстояние распространения $z = 0$ (в начальной плоскости) (а, б), $z = z_0$ (на расстоянии Рэлея) (б, д), и $z = 10z_0$ (в дальней зоне) (в, е), расчётная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 5$ мм ($z = 0$), $R = 5$ мм ($z = z_0$), $R = 10$ мм ($z = 10z_0$), число отсчётов на каждом рисунке 2048×2048 . Вставка на рис. (г) показывает увеличенный фрагмент в центре. ТЗ вычислялся на окружности $x^2 + y^2 = R_1^2$, где $R_1 = 0,8R$. Полученные значения равны 0,9981 (а, г), 0,9992 (б, д), и 0,9999 (в, е)

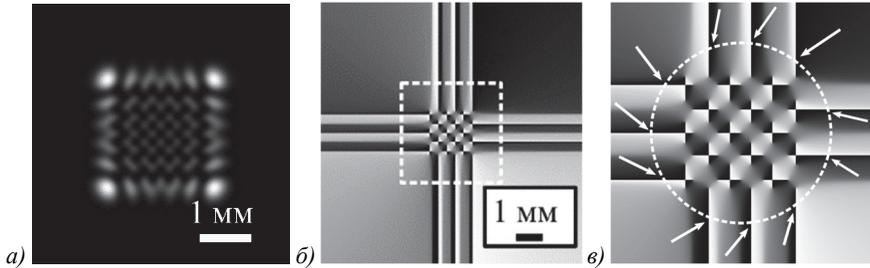


Рис. 1.8. Распределения интенсивности (а) и фазы (б) суммы двух мод Эрмита-Гаусса в начальной плоскости, а также увеличенный фрагмент (в) фазы в пунктирном квадрате на рис. (б). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w_0 = 0,5$ мм, порядок оптического вихря $n = 5$, расчётная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 5$ мм, число отсчётов 2048×2048 . Стрелками (в) показаны 11 скачков фазы на -2π при обходе вдоль пунктирной окружности против часовой стрелки. ТЗ вычислялся на окружности $x^2 + y^2 = R_1^2$, где $R_1 = 0,8R$. Полученное значение равно $-10,9550$

На рис. 1.9 показаны распределения интенсивности и фазы вихревой моды Эрмита-Гаусса в начальной плоскости. Видно, что на вертикальной оси расположено 10 изолированных нулей интенсивности первого порядка, которые в сумме дают ТЗ, равный -10 . При расчёте ТЗ было получено значение $-9,9993$.

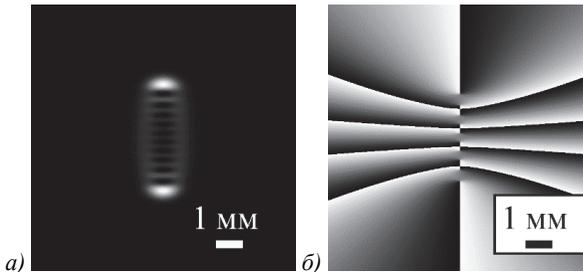


Рис. 1.9. Распределения интенсивности (а) и фазы (б) вихревой моды Эрмита-Гаусса в начальной плоскости. Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w_0 = 0,5$ мм, порядок оптического вихря $n = 10$, параметр асимметрии $a = 0,3$, расчётная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 5$ мм, число отсчётов 2048×2048 . ТЗ вычислялся на окружности $x^2 + y^2 = R_1^2$, где $R_1 = 0,8R$. Полученное значение равно $-9,9993$

В этом разделе показано, что, если известные вихревые лазерные пучки с радиальной симметрией (Лагерра-Гаусса и Куммера) видоизменить с помощью смещения координат к комплексную плоскость, то и вид поперечного распределения интенсивности, и орбитальный угловой момент также изменяются и зависят от степени асимметрии, а топологический заряд асимметричных пучков Лагерра-Гаусса и Куммера

остается таким же, как у радиально-симметричных пучков, равным n . Показано также, что если известный пучок Бесселя-Гаусса с радиальной симметрией и топологическим зарядом n , подвергнуть гибриднему преобразованию, когда гауссов пучок остается без изменения, а координаты пучка Бесселя смещаются в комплексную плоскость, то у получившегося асимметричного пучка Бесселя-Гаусса топологический заряд останется равным n . Известно, что пучок Эрмита-Гаусса не несет топологический заряд (он топологически нейтральный). Если такой пучок проходит через цилиндрическую линзу, ось которой составляет некоторый угол с декартовыми координатами, то получившийся пучок Эрмита-Гаусса (вихревой пучок Эрмита-Гаусса) будет обладать орбитальным угловым моментом, зависящим от угла поворота цилиндрической линзы. Но, как оказалось, топологический заряд такого пучка будет не будет зависеть от поворота цилиндрической линзы и будет равен n . Вихревой пучок Эрмита-Гаусса является конечной суперпозицией обычных безвихревых пучков Эрмита-Гаусса. Но можно создать вихревой пучок, сложив всего два пучка Эрмита-Гаусса, например, с номерами $(n, n+1)$ и $(n+1, n)$ и с задержкой по фазе $\pi/2$. ТЗ такого пучка будет равен $-(2n+1)$, если считать по числу нулей интенсивности и по формуле (1.53).

Глава 2. Топологический заряд гауссова пучка с несколькими оптическими вихрями

2.1. Сохранение топологического заряда при смещении оптических вихрей

В настоящее время активно исследуется оптическая связь в свободном пространстве [45]. Для повышения пропускной способности одним из способов является мультиплексирование светового пучка по орбитальному угловому моменту (ОУМ). Поэтому большое количество работ посвящено исследованию распространения различных видов оптических вихрей в атмосфере с турбулентностью. Если рассматривать вихревые пучки Бесселя [46], то они удобны тем, что их форма не искажается при распространении и восстанавливается при прохождении через препятствия. Однако для их формирования и использования в оптической связи требуются аксиконы с большой апертурой [47]. Если использовать пучки Лагерра-Гаусса [8, 48, 49, 50], Бесселя-Гаусса [10, 51, 52, 53] или простые оптические вихри, формирующиеся при дифракции гауссова пучка на спиральной фазовой пластинке (СФП) [54], то с увеличением порядка вихря (топологического заряда) растёт радиус светового кольца и потому увеличивается необходимый размер приёмной аппаратуры.

Поэтому в качестве носителей информации практический интерес представляют также альтернативные световые поля, в том числе без радиальной симметрии. Для таких полей ОУМ уже не равен топологическому заряду. Тем не менее, ОУМ также может быть использован для идентификации пучка, поэтому его определению посвящён ряд работ [6, 35].

В данном разделе исследуется гауссов пучок с несколькими единичными фазовыми сингулярностями, расположенными равномерно на окружности. Получены точные выражения для его некоторых интегральных характеристик, а именно для мощности, для ОУМ, а также для топологического заряда. Картина интенсивности такого пучка представляет собой большое световое пятно с набором теневых пятен внутри, по числу которых пучок может быть идентифицирован. Проведено моделирование распространения таких пучков в среде со случайными неоднородностями (с помощью экрана со случайной фазой).

2.1.1 Мощность, орбитальный угловой момент и топологический заряд гауссова пучка с фазовыми сингулярностями, расположенными на окружности

В [19] было получено выражение для гауссова пучка с множественными оптическими вихрями. Если m фазовых сингулярностей расположены в точках с координатами (a_p, b_p) ($p=0, \dots, m-1$), то комплексная амплитуда такого пучка имеет вид:

$$E(r, \varphi, z) = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0} \right)^m \times \exp \left(-\frac{r^2}{\sigma w_0^2} \right) \prod_{p=0}^{m-1} \left(\frac{r e^{i\varphi}}{\sigma} - a_p - i b_p \right), \quad (2.1)$$

где (r, φ, z) – цилиндрические координаты, w_0 – радиус перетяжки гауссова пучка, $\sigma = 1 + iz/z_0$, $z_0 = kw_0^2/2$ – расстояние Рэлея (k – волновое число). Из (2.1) следует, что пучок (2.1) структурно устойчив и поперечное распределение интенсивности при распространении сохраняется с точностью до масштаба и поворота вокруг оптической оси.

Далее ограничимся случаем, когда все фазовые сингулярности расположены равномерно на окружности радиуса a , то есть в точках с декартовыми координатами

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi_p, \\ y = a \sin \varphi_p, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\varphi_p = 2\pi p/m$, $p=0, \dots, m-1$. Выписав в явном виде выражения (2.1) для нескольких небольших значений m , можно предположить, что для произвольного количества вихрей m комплексная амплитуда равна:

$$E(r, \varphi, z) = (1/\sigma) \left(\sqrt{2}/w_0 \right)^m \exp(-r^2/\sigma w_0^2) \left((r^m e^{im\varphi} / \sigma^m) - a^m \right). \quad (2.3)$$

Чтобы убедиться в верности выражения (2.3) при любом m , надо доказать, что, во-первых, в начальной плоскости в точках (2.2) будет нулевая амплитуда, и, во-вторых, что пучок (2.3) удовлетворяет параксиальному уравнению распространения. Первое доказывается тривиально, поскольку полярные координаты точек (2.2) равны $r=a$ и $\varphi = 2\pi p/m$. При подстановке этих значений в (2.3) выражение в круглых скобках при $z=0$ (то есть $\sigma=1$) обращается в нуль.

Второе же следует из того, что пучок (2.3) является суперпозицией пучка Лагерра-Гаусса с нулевым радиальным индексом и гауссова пучка, каждый из которых является решением параксиального уравнения распространения. Таким образом, ТЗ пучка Лагерра-Гаусса можно определять при интерференции с пучком Гаусса простым подсчётом количества нулей в распределении интенсивности.

Далее найдём мощность W и ОУМ J_z пучка (2.3). Они вычисляются по стандартным формулам:

$$W = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |E|^2 r dr d\varphi, \quad (2.4)$$

$$J_z = -i \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E^* \frac{\partial E}{\partial \varphi} r dr d\varphi, \quad (2.5)$$

где распределение комплексной амплитуды $E(r, \varphi, z)$ может быть взято в любой поперечной плоскости. Подставляя комплексную амплитуду (2.3) в формулу (2.4), получим

$$W = \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0} \right)^{2m} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) (r^{2m} - 2a^m r^m \cos m\varphi + a^{2m}) r dr d\varphi. \quad (2.6)$$

Интеграл от косинуса по угловой полярной координате φ даст ноль, а далее воспользуемся справочным интегралом (выражение 6.1.1 в [55]):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp(-pr^2) r^{2m} r dr &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-px) x^m dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-t) \left(\frac{t}{p}\right)^m \frac{dt}{p} = \frac{1}{2p^{m+1}} \Gamma(m+1), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция. Тогда мощность примет вид:

$$W = 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0} \right)^{2m} \left[\frac{m!}{2(2/w_0^2)^{m+1}} + a^{2m} \frac{1}{2(2/w_0^2)} \right] = \frac{\pi w_0^2}{2} \left[m! + \left(\frac{2a^2}{w_0^2} \right)^m \right]. \quad (2.8)$$

Аналогично, подставляя комплексную амплитуду (2.3) в начальной плоскости ($z=0$) в выражение (2.5) для ОУМ пучка, получим:

$$\begin{aligned} J_z &= -i \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0} \right)^{2m} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) (r^m e^{-im\varphi} - a^m) (imr^m e^{im\varphi}) r dr d\varphi = \\ &= m \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0} \right)^{2m} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) (r^{2m} - a^m r^m e^{im\varphi}) r dr d\varphi. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Интеграл от $e^{im\varphi}$ по угловой полярной координате φ отличен от нуля только при $m=0$. Но так как перед интегралом стоит множитель m , второе слагаемое в круглых скобках на интеграл не влияет. Поэтому ОУМ равен

$$J_z = 2\pi m \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0} \right)^{2m} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2r^2}{w_0^2}\right) r^{2m} r dr. \quad (2.10)$$

Этот интеграл выражается через гамма-функцию (выражение 6.1.1 в [55]), которая, так как m – целое, сводится к факториалу и ОУМ имеет вид:

$$J_z = 2\pi m \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0} \right)^{2m} \frac{m!}{2(2/w_0^2)^{m+1}} = m \frac{\pi w_0^2}{2} m!. \quad (2.11)$$

Разделив (2.11) на (2.8), получим значение ОУМ, нормированное на мощность пучка:

$$\frac{J_z}{W} = m \frac{m!}{m! + (2a^2/w_0^2)^m}. \quad (2.12)$$

Из (2.12) видно, что нормированный ОУМ не может превышать число оптических вихрей в пучке и убывает до нуля с удалением вихрей от оптической оси.

В [15] приведена формула для топологического заряда вихревого светового поля (силы вихря):

$$TC = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\arg E(r, \varphi, z)] d\varphi. \quad (2.13)$$

Перепишем эту формулу в более удобном виде:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial \varphi} d\varphi \right\}. \quad (2.14)$$

Подставив в (2.14) комплексную амплитуду (2.3), получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{im\sigma^{-m} r^m e^{im\varphi}}{\sigma^{-m} r^m e^{im\varphi} - a^m} d\varphi \right\}. \quad (2.15)$$

Так как при $r \rightarrow \infty$ слагаемым a^m в знаменателе можно пренебречь, получаем, что ТЗ пучка (2.3) не зависит от пройденного расстояния z и от радиуса a окружности, на которой расположены оптические вихри, а равен числу оптических вихрей в пучке:

$$TC = m. \quad (2.16)$$

Из (2.16) видно, что в отличие от ОУМ топологический заряд остаётся неизменным с расстоянием a и равен количеству вихрей.

2.1.2 Численное моделирование распространения в случайной среде

Если использовать в качестве носителей информации традиционные радиально-симметричные оптические вихри, то для разных топологических зарядов на картине интенсивности появляются кольца разных радиусов. При этом само кольцо после прохождения через случайную среду искажается и потому определение топологического заряда по радиусу затруднительно. Поэтому практический интерес представляют также световые пучки без радиальной симметрии. Так, в [56] в качестве такого пучка рассмотрены суперпозиции двух гауссовых пучков, прошедших через СФП с разным топологическим зарядом. Вместо кольца

распределение интенсивности состоит из световых пятен, число которых равно модулю разности топологических зарядов. В данном подразделе, аналогично, рассмотрим пучки (2.3), в сечении интенсивности которых имеется m пятен, но не светлых, а тёмных (с нулевой интенсивностью в центре пятна).

На рис. 2.1 показаны распределения интенсивности и фазы пучков (2.3) в начальной плоскости, а также после распространения в свободном пространстве со случайными искажениями. Случайная среда заменена на диффузор со случайной фазой $\psi(x, y)$, помещённый в начальной плоскости. Корреляционная функция этого диффузора аппроксимировалась в виде гауссовой экспоненты:

$$\langle \exp(i\psi(x, y) - i\psi(x', y')) \rangle = \exp \left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\alpha^2} \right], \quad (2.17)$$

где α – радиус корреляции однородного фазового диффузора, угловые скобки в (2.17) означают усреднение по ансамблю статистически подобных фазовых диффузоров. Использовались следующие параметры расчёта: длина волны $\lambda = 1,55$ мкм (при такой длине волны свет в летних условиях на средних широтах пропускается примерно на 70 %, и, в тоже время, эта длина волны широко используется в телекоммуникациях), радиус перетяжки гауссова пучка $w = 1,5$ мм, расстояние распространения $z = 2$ м, количество вихрей с единичным топологическим зарядом в пучке $m = 3$, расстояния от оптической оси до центров вихрей $a = 0,7w_0$ (при таком расстоянии на картине интенсивности все три нуля не сливаются и отчётливо различимы), радиус корреляции диффузора $\alpha = 50$ мкм. Фаза на диффузоре варьировалась в пределах $[-\pi/6, \pi/6]$ (рис. 2.1в–д), $[-\pi/2, \pi/2]$ (рис. 2.1е–з) $[-\pi$ до $\pi]$ (рис. 2.1и–л). На всех рисунках показана область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 5$ мм.

Из рис. 2.1 видно, что, несмотря на существенные фазовые искажения (рис. 2.1и), на распределении интенсивности (рис. 2.1к) присутствуют три тёмных пятна вокруг центра картины, а на распределении фазы (рис. 2.1л) видны три точки фазовой сингулярности.

На рис. 2.2 показаны распределения интенсивности пучка (2.3) для разного количества оптических вихрей в пучке и разной вариации случайной фазы на диффузоре. Параметры расчёта те же, что и на рис. 2.1, но число вихрей равно $m = 2$ (рис. 2.2а, б), $m = 3$ (рис. 2.2в, г), $m = 4$ (рис. 2.2д, е), $m = 5$ (рис. 2.2ж, з). При этом расстояние от оптической оси до центров вихрей составляло $a = 0,55w_0$ (рис. 2.2а, б), $a = 0,7w_0$ (рис. 2.2в, г), $a = 0,85w_0$

(рис. 2.2д, е), $a = w_0$ (рис. 2.2ж, з). Фаза на диффузоре варьировалась в пределах $[-\pi/2, \pi/2]$ (рис. 2а, в, д, ж) и $[-\pi, \pi]$ (рис. 2б, г, е, з).

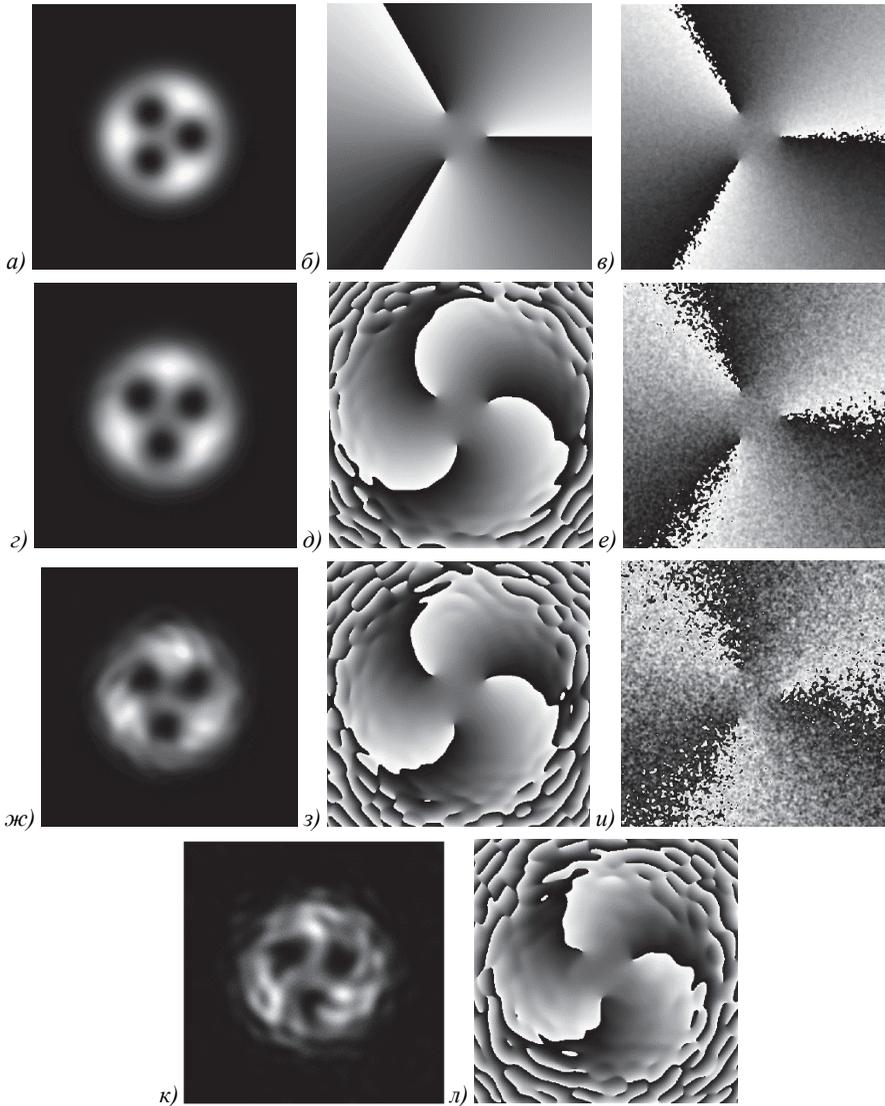


Рис. 2.1. Распределение интенсивности (а) и фазы (б) пучка (2.3) с $t = 3$ в начальной плоскости, распределения фаз после прохождения через случайный фазовый диффузор (в, е, и), распределения интенсивности (г, ж, к) и фазы (д, з, л) после распространения в свободном пространстве. Случайная фаза на диффузоре варьировалась в пределах $[-\pi/6, \pi/6]$ (в-д), $[-\pi/2, \pi/2]$ (е-з) $[-\pi, \pi]$ (и-л)

Из рис. 2.2 видно, что при вариации фазы на случайном диффузоре от $-\pi/2$ до $\pi/2$ нули интенсивности отчётливо видны, но при вариации фазы $-\pi$ до π при $m > 2$ их различить сложнее. Кроме распределения интенсивности, был рассчитан ОУМ. Значения ОУМ после прохождения через случайный фазовый диффузор и распространения в свободном пространстве приведены в Таблице 2.1.

Из Табл. 2.1 видно, что если фаза на диффузоре варьируется от $-\pi/2$ до $\pi/2$, то ОУМ отличается от теоретического значения не более, чем на 12%. Более того, ошибка в 12% встретилась при моделировании только при $m = 3$, в то время как в остальных случаях ошибка не превышала 5%. Заметим, что при любом шуме фазы на рис. 2.2 число оптических вихрей оставалось тоже, что и без шума. То есть топологический заряд не изменялся, в отличие от ОУМ (Табл. 2.1).

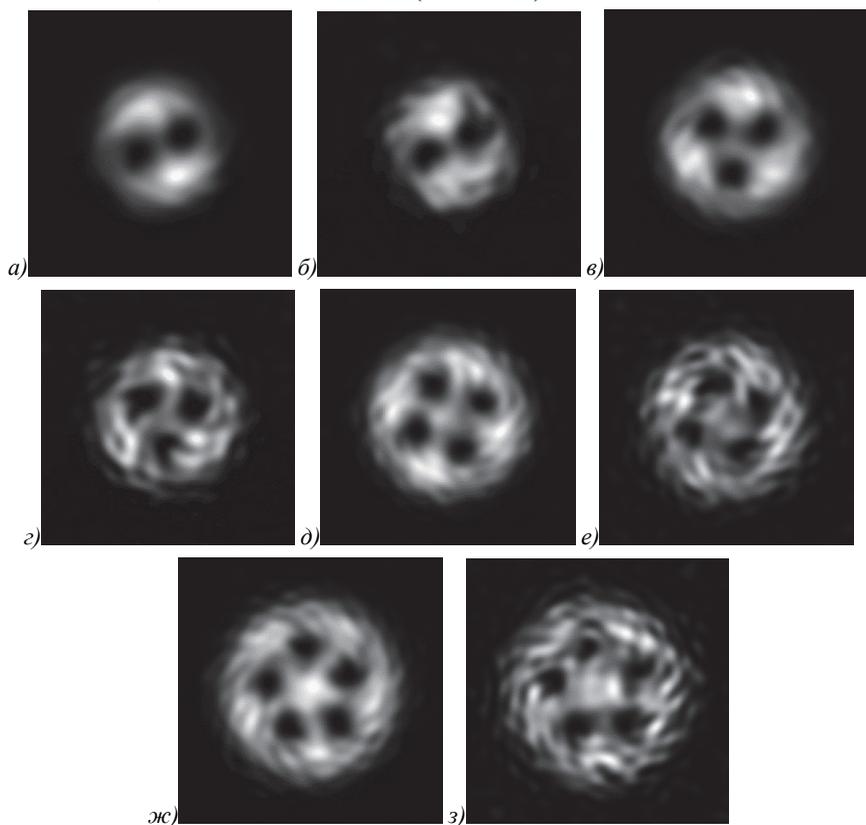


Рис. 2.2. Распределения интенсивности пучка (2.3) на расстоянии $z = 2$ м для разного количества оптических вихрей в пучке и для разной вариации случайной фазы на диффузоре

Табл. 2.1. Нормированный ОУМ пучка (2.3) после прохождения через случайный диффузор и распространения в свободном пространстве для разного количества вихрей в пучке и для разной вариации фазы в случайном диффузоре (СКО), рассчитанный теоретически по формуле (2.12) и численно по формулам (2.4), (2.5)

	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
ОУМ (теор.)	1,69	2,59	3,39	3,95
ОУМ (числ.) Фаза от $-\pi/6$ до $\pi/6$	1,64	2,52	3,31	3,85
ОУМ (числ.) Фаза от $-\pi/2$ до $\pi/2$	1,64 (3%)	2,28 (12%)	3,23 (5%)	3,78 (4%)
ОУМ (числ.) Фаза от $-\pi$ до π	1,14	2,17	2,75	2,42

В этом разделе исследованы интегральные характеристики гауссова пучка с несколькими оптическими вихрями, расположенными на окружности. Получены выражения для мощности такого пучка, его ОУМ и ТЗ. Показано, что нормированный ОУМ меньше числа вихрей в пучке, причём эта величина убывает с ростом расстояния от оптической оси до центров вихрей. Также показано, что ТЗ, напротив, не зависит от этого расстояния, и равен числу вихрей.

С помощью дискретного преобразования Френеля и фазового случайного экрана (диффузора) с корреляционной функцией в виде гауссовой экспоненты проведено моделирование распространения гауссова пучка с несколькими оптическими вихрями в случайной среде. При умеренных вариациях фазы на диффузоре (от $-\pi/2$ до $\pi/2$) на рассчитанных распределениях видны локальные минимумы интенсивности (центры оптических вихрей). При этом ошибка ОУМ от теоретического значения составила не более 12% для $m=2$ и не более 5% для других значений m . Таким образом, ОУМ может наряду с количеством тёмных пятен быть использован для идентификации пучка. Рассмотренные пучки могут являться альтернативой традиционным радиально-симметричным оптическим вихрям при оптической передаче информации в силу простоты идентификации оптического вихря по числу локальных минимумов интенсивности в гауссовом пучке.

2.2 Спиральная фазовая пластинка с множеством центров сингулярности

Вихревые лазерные пучки [26] продолжают напряженно исследоваться из-за их уникальных топологических свойств [1, 15] и из-за их широкого применения в квантовой информатике [27], системах беспроводной связи [57], манипулировании микрочастицами [58], зондирование атмосферы в присутствии турбулентности [59]. Впервые вихревые лазерные пучки с фазовой сингулярностью были сформированы с по-

мощью амплитудной голограммы с «вилочкой» [60] и спиральной фазовой пластинки (СФП) [61]. Сегодня такие пучки удобно формировать с помощью пространственного модулятора света (ПМС) [56]. Лазерные пучки с фазовой сингулярностью характеризуются определенным топологическим зарядом (ТЗ) [15] и несут орбитальный угловой момент (ОУМ) [1]. Эти характеристики отражают разные стороны вихревого пучка. Если ОУМ сохраняется при распространении пучка, то ТЗ может сохраняться, а может не сохраняться при распространении [38]. Топологический заряд пучка, состоящего из линейной комбинации ОАМ-гармоник [37] определяется «топологической конкуренцией» между ними [43]. При распространении лазерного пучка с начальным дробным ТЗ могут рождаться новые оптические вихри (центры сингулярности) [34, 62]. В [19, 20] было показано, что гауссов пучок с внедренными в его перетяжку множеством оптических вихрей с топологическими зарядами одного знака является структурно-стабильным и при распространении изменяет только масштаб и может вращаться. В [63] рассмотрен частный случай, когда центры сингулярности (нули интенсивности) лежат равномерно на окружности (центр окружности лежит на оптической оси) в поперечном сечении гауссова пучка. В [63] удалось получить точные выражения для ТЗ и ОУМ такого мульти-вихря. Измерять ТЗ можно с помощью цилиндрической линзы [24] или треугольной диафрагмы [64], а измерять ОУМ можно с помощью двух цилиндрических линз [6].

В данном разделе рассматривается новый оптический элемент – мульти-спиральная фазовая пластинка (МСФП), которая имеет множество центров сингулярности фазы, произвольно расположенных по плоскости пластинки. В практическом плане формировать вихревой лазерный пучок с помощью МСФП можно как обычно с помощью ПМС. Приводятся замкнутые выражения для ТЗ и ОУМ оптических вихрей, сформированных МСФП. Особенностью такой спиральной фазовой пластинки является то, что при попадании центра сингулярности на край ограничивающей диафрагмы ТЗ пучка в начальной плоскости становится полуцелым. Если все центры сингулярности попали на край диафрагмы, то ОУМ пучка будет равен нулю. Если все центры сингулярности собраны в центре пластинки, то МСФП становится обычной СФП. Заметим, что ранее авторы уже рассматривали пучки с несколькими сингулярностями [65]. Но в [65] были рассмотрены поляризационные сингулярности, внедренные в гауссов пучок. В каждой точке у

такого пучка поляризация линейная, но вектор поляризации изменяется по полю, аналогично как у радиальной или азимутальной поляризации. В данном разделе мы рассматриваем другую ситуацию, когда гауссов пучок с линейной поляризацией падает на фазовую пластинку с несколькими сингулярностями, центры которых произвольно расположены по полю. Сходство этих работ в том, что в обеих работах в начальном поле присутствуют несколько произвольно расположенных по сечению пучка сингулярностей (неопределенностей) фазы или поляризации. Оба типа таких неопределенностей приводят к изолированным нулям интенсивности в поле. А различия в том, что для случая поляризационных сингулярностей удалось только найти координаты нулей интенсивности, а для пучка с фазовыми сингулярностями удалось рассчитать ОУМ и ТЗ.

2.2.1 Топологический заряд поля от МСФП

Рассмотрим комплексную функцию пропускания мульти-спиральной фазовой пластинки (МСФП), у которой имеются M центров фазовой сингулярности, находящихся в точках с полярными координатами (r_p, φ_p) :

$$E(r, \varphi) = \text{circl}(r/R) \exp(i\Psi(r, \varphi)), \quad (2.18)$$

$$\Psi(r, \varphi) = \sum_{p=1}^M n_p \arctan \left(\frac{r \sin \varphi - r_p \sin \varphi_p}{r \cos \varphi - r_p \cos \varphi_p} \right), \quad (2.19)$$

где (r, φ, z) – цилиндрические координаты, n_p – топологический заряд каждой отдельной сингулярности, $\text{circl}(r/R) = \{1, r \leq R; 0, r > R\}$ – функция круглой диафрагмы с радиусом R , которая ограничивает МСФП. Рассчитаем полный ТЗ светового поля в начальной плоскости, которое появляется сразу за МСФП (2.18), если осветить ее нормально световым пучком с радиально-симметричной амплитудой $A(r)$. Для расчета ТЗ воспользуемся формулой Берри [15]:

$$\begin{aligned} TC &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Подставим в первый из интегралов выражения (2.20) аргумент функции (2.18), получим:

$$\begin{aligned}
TC &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi(r, \varphi) = \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^M n_p \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{r^2 - rr_p \cos(\varphi - \varphi_p)}{r^2 + r_p^2 - 2rr_p \cos(\varphi - \varphi_p)} = \\
&= \frac{R}{2\pi} \sum_{p=1}^M n_p \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R - r_p \cos(\varphi - \varphi_p)}{R^2 + r_p^2 - 2Rr_p \cos(\varphi - \varphi_p)} = \\
&= \begin{cases} \sum_{p=1}^M n_p, r_p < R, p = 1, 2, \dots, M, \\ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^M n_p, r_p = R, p = 1, 2, \dots, M, \\ \sum_{p=1}^N n_p + \frac{1}{2} \sum_{p=N+1}^M n_p, r_p < R, p = 1, 2, \dots, N, \\ r_p = R, p = N+1, N+2, \dots, M. \end{cases} \tag{2.21}
\end{aligned}$$

При получении (2.21) воспользовались справочным интегралом [21]

$$\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, |a| > |b|. \tag{2.22}$$

Из (2.21) следует, что если точка сингулярности фазы МСФП находится на краю диафрагмы, то ТЗ светового поля в начальной плоскости будет дробным (целым или полуцелым). Ранее авторами было показано [43], что при распространении оптического вихря с начальным дробным ТЗ могут возникать несколько сценариев эволюции такого вихря, в зависимости от близости начального ТЗ к четному или нечетному целому числу. В нашем случае механизм возникновения дробного ТЗ другой, и в данном случае начальный ТЗ может быть только целым или полуцелым. Заметим, что если в (2.18) вместо освещающей плоской волны, ограниченной круглой диафрагмой, осветить СФП гауссовым пучком, то ТЗ оптического вихря, сформировавшегося за СФП, будет равен сумме топологических зарядов всех сингулярностей:

$$TC = \sum_{p=1}^M n_p.$$

2.2.2 Орбитальный угловой момент пучка после МСФП

Найдем далее орбитальный угловой момент светового поля (2.18) в начальной плоскости. Для этого воспользуемся известным выражением для расчета ОУМ и мощности пучка [6]:

$$J_z = -i \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E^* \frac{\partial E}{\partial \varphi} r dr d\varphi \quad (2.23)$$

$$W = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |E|^2 r dr d\varphi \quad (2.24)$$

Для взятия производной под интегралом в (2.23) от поля (2.18) удобно переписать амплитуду поля (2.18) в виде:

$$E(r, \varphi) = \text{circ}l \left(\frac{r}{R} \right) A(r) \prod_{p=1}^M \left(\frac{r e^{i\varphi} - r_p e^{i\varphi_p}}{\sqrt{r^2 + r_p^2 - 2rr_p \cos(\varphi - \varphi_p)}} \right)^{n_p}. \quad (2.25)$$

Подставим (2.25) в (2.23), получим:

$$\begin{aligned} J_z &= \sum_{p=1}^M n_p \int_0^R |A(r)|^2 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{r^2 - rr_p \cos(\varphi - \varphi_p)}{r^2 + r_p^2 - 2rr_p \cos(\varphi - \varphi_p)} = \\ &= \sum_{p=1}^M n_p \int_0^R |A(r)|^2 r dr \begin{cases} 2\pi, & r_p < r \\ 0, & r_p \geq r \end{cases} = \sum_{p=1}^M n_p \int_{r_p}^R |A(r)|^2 r dr. \end{aligned} \quad (2.26)$$

При получении (2.26) воспользовались справочными интегралами [21]:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a^2 - 2a \cos x} &= 2\pi / |1 - a^2|, \\ \int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{1 + a^2 - 2a \cos x} &= \begin{cases} 2\pi a / (1 - a^2), & a < 1, \\ 2\pi / a (a^2 - 1), & a \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Нормированный ОУМ светового пучка с амплитудой $A(r)$, прошедшего МСФП (2.18) будет равен выражению:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\sum_{p=1}^M n_p \int_{r_p}^R |A(r)|^2 r dr}{\int_0^R |A(r)|^2 r dr}. \quad (2.28)$$

Выражение (2.28) для ОУМ обобщает ранее полученное авторами выражение для СФП с одним смещенным центром сингулярности [7]. Из сравнения (2.21) и (2.28) видно, что ОУМ зависит от степени близости центров сингулярности фазы ОСФП к краю круглой диафрагмы радиуса R . Если центр сингулярности фазы попадает на край диафрагмы, то он «пропадает» из суммы в (2.28), и не дает вклад в ОУМ. Такой «крайний» центр сингулярности ($r_p = R$) дает «половинный» ($n_p / 2$)

вклад в общий ТЗ пучка. В случае, если все центры сингулярности лежат на окружности радиуса r_0 , выражение (2.28) упрощается:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\int_0^{r_0} |A(r)|^2 r dr}{\int_0^R |A(r)|^2 r dr} \sum_{p=1}^M n_p. \quad (2.29)$$

Если радиус окружности, на которой лежат центры сингулярностей, совпадает с радиусом диафрагмы ($r_0 = R$), то из (2.9) следует, что ОУМ пучка после СФП будет равен нулю. Однако ТЗ такого пучка будет отличен от нуля и равен $0,5\Sigma n_p$. Простой пример оптического вихря, у которого ОУМ равен нулю, а ТЗ отличен от нуля приведен ниже. Из (2.29) видно, что если все центры сингулярности свести в центр диафрагмы ($r_p = 0$), то ОУМ пучка (2.29) будет равно ТЗ (2.21): $J_z/W = \Sigma n_p$.

Рассмотрим суперпозицию двух соосных гауссовых оптических вихрей с разными топологическими зарядами и разными весовыми коэффициентами, амплитуда которых имеет вид:

$$E(r, \varphi, z = 0) = \exp(-r^2/w^2) (a \exp(in\varphi) + b \exp(im\varphi)). \quad (2.30)$$

ТЗ такой суперпозиции найден в [43] и находится из выражения:

$$TC = \left(\frac{n+m}{2} \right) + \left(\frac{n-m}{2} \right) \left(\frac{|a|^2 - |b|^2}{|a|^2 + |b|^2} \right), \quad (2.31)$$

а ОУМ пучка (2.30) также получен в [43] и равен:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{na^2 + mb^2}{a^2 + b^2}. \quad (2.32)$$

Из выражений (2.31) и (2.32) следует, что ОУМ равен нулю при условии $n = -m(b/a)^2$. А ТЗ суперпозиции (2.30) отличен от нуля и равен $TC = m$, если $b > a$ и равен $TC = n$, если $b < a$. И только при $b = a$ ТЗ суперпозиции будет равен нулю. Из этого простого примера следует, что у оптического вихря может быть равен нулю ТЗ, а ОУМ отличен от нуля. И наоборот, ТЗ отличен от нуля, а ОУМ равен нулю.

2.2.3 Амплитуда светового поля, прошедшего МСФП

Найти амплитуду светового поля в зоне Френеля или в дальней зоне для светового поля (2.18) в замкнутом виде (без использования рядов) не удастся. Поэтому упростим задачу и рассмотрим к чему приводит смещение с оптической оси одного центра сингулярности оптического

вихря, внедренного в перетяжку гауссова пучка, в Фурье-плоскости сферической линзы. То есть вместо (2.18) рассмотрим в начальной плоскости световое поле с амплитудой вида:

$$E(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) (re^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0})^n, \quad (2.33)$$

В Фурье-плоскости сферической линзы с фокусным расстоянием f комплексная амплитуда поля (2.33) выражается через преобразование Фурье

$$\begin{aligned} E(\rho, \theta) &= \left(\frac{-ik}{2\pi f w^n}\right) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{w^2}} (re^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0})^n \exp\left(\frac{-ikr\rho}{f} \cos(\varphi - \theta)\right) r dr d\varphi = \\ &= \left(\frac{-ikw^2}{2f}\right) \exp\left[-\left(\frac{k\rho}{2f}\right)^2\right] \left(\frac{-ik\rho}{2f} e^{i\theta} - \frac{r_0}{w} e^{i\varphi_0}\right)^n, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где k – волновое число света. Из сравнения (2.33) и (2.34) видно, что ноль интенсивности (центр сингулярности) n -го порядка в начальной плоскости, находящийся в точке с координатами $(r_0, \varphi_0, z=0)$ в Фурье-плоскости останется по-прежнему нулем интенсивности n -го порядка, но будет находиться в точке с координатами $(2fr_0/kw^2, \varphi_0 + \pi/2, z=f)$. То есть повернется на 90 градусов по отношению к начальному положению. ОУМ такого пучка, в котором оптический вихрь смещен с оси, уменьшается с ростом величины смещения r_0 [7]. Можно показать, что аналогичным образом будут распространяться и несколько нулей интенсивности (оптические вихри), внедренных в разные точки перетяжки гауссова пучка. Комплексная амплитуда такого пучка на любом расстоянии от перетяжки будет иметь вид [19, 20]:

$$E(r, \varphi) = \frac{1}{q(z)} \left(\frac{\sqrt{2}}{w}\right)^M \exp\left(\frac{-r^2}{w^2 q(z)}\right) \prod_{p=1}^M \left(\frac{re^{i\varphi}}{q(z)} - r_p e^{i\varphi_p}\right)^{n_p}, \quad (2.35)$$

где $q(z) = 1 + iz/z_0$, $z_0 = kw^2/2$ – длина Рэлея.

Найдем также комплексную амплитуду поля в Фурье-плоскости для поля с комплексной амплитудой в начальной плоскости:

$$E(r, \varphi) = \exp(-r^2/w^2) (re^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0})^n (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0))^{-n/2}, \quad (2.36)$$

Фурье-преобразование для поля (2.36) будет иметь вид:

$$E(\rho, \theta) = \left(\frac{-ik}{2\pi f} \right) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{w^2}} \exp \left[in \arctg \left(\frac{r \sin \varphi - r_0 \sin \varphi_0}{r \cos \varphi - r_0 \cos \varphi_0} \right) \right] \times \\ \times \exp \left(\frac{-ikr\rho}{f} \cos(\varphi - \theta) \right) r dr d\varphi. \quad (2.37)$$

Введем новые переменные:

$$\begin{cases} r' \sin \varphi' = r \sin \varphi - r_0 \sin \varphi_0, \\ r' \cos \varphi' = r \cos \varphi - r_0 \cos \varphi_0. \end{cases} \quad (2.38)$$

Тогда в новых переменных получим вместо (2.37):

$$E(\rho, \theta) = \left(\frac{-ik}{2\pi f} \right) \exp \left(-i \frac{k}{f} r_0 \rho \cos(\theta - \varphi_0) \right) e^{-r_0^2/w^2} x^{-n} \left(-i \frac{k}{f} \rho e^{i\theta} - \frac{2r_0}{w^2} e^{i\varphi_0} \right)^n \times \\ \int_0^\infty \exp(r'^2/w^2) \cdot J_n(r'x) r' dr', \quad (2.39)$$

$$\text{где } x = \left[(k\rho/f)^2 - (2r_0/w^2)^2 - 2i(kr_0\rho/fw^2) \cos(\theta - \varphi_0) \right]^{1/2}.$$

Интеграл по r' в (2.39) можно вычислить с помощью справочного интеграла [21]:

$$\int_0^\infty x e^{-px^2} J_\nu(cx) dx = \frac{c\sqrt{\pi}}{8p^{3/2}} e^{-\frac{c^2}{8p}} \left[I_{(\nu-1)/2} \left(\frac{c^2}{8p} \right) - I_{(\nu+1)/2} \left(\frac{c^2}{8p} \right) \right], \quad (2.40)$$

где $I_\nu(x)$ – модифицированные функции Бесселя. Окончательно вместо (2.39) получим:

$$E(\rho, \theta) = \left(\frac{-ikw^2}{16\sqrt{\pi}f} \right) \exp \left(-i \frac{k}{f} r_0 \rho \cos(\theta - \varphi_0) \right) e^{-r_0^2/w^2} x^{-n} (xw) \times \\ \times \left(-i \frac{k}{f} \rho e^{i\theta} - \frac{2r_0}{w^2} e^{i\varphi_0} \right)^n \left[I_{(n-1)/2} \left(-\frac{x^2 w^2}{8} \right) - I_{(n+1)/2} \left(-\frac{x^2 w^2}{8} \right) \right]. \quad (2.41)$$

Из (2.41) следует, что, как и у поля (2.34), так и поля (2.36), ноль интенсивности порядка n будет в Фурье-плоскости находиться в точке с координатами $(\rho, \theta, z) = (2fr_0/(kw^2), \varphi_0 + \pi/2, z=f)$. То есть, оба поля (2.21) и (2.36) топологически одинаковы.

2.2.4 Эксперимент и моделирование

На рис. 2.3 показана экспериментальная установка, использованная в экспериментах. Линейно-поляризованный лазерный гауссов пучок ($\lambda = 532$ нм, w_0 составляет около 5 мм) был расширен и коллимирован с

помощью комбинации точечного отверстия РН (с апертурой 40 мкм) и сферической линзы L_1 с фокусным расстоянием 350 мм. Зеркала M_1 и M_2 , а также два светоделителя B_1 и B_2 были использованы для реализации интерферометрической установки Маха-Цендера. Коллимированный лазерный пучок далее падал на дисплей пространственного модулятора света SLM (HOLOEYE LC-2012, 1024×768 пикселей), который использовался для реализации функции мульти-спиральной фазовой пластинки. Оптическая система $4-f$ состояла из линз L_2 (фокусное расстояние $f_2 = 150$ мм) и L_3 (фокусное расстояние $f_3 = 150$ мм), а диафрагма D пространственно фильтровала лазерный пучок, генерируемый SLM. Распределение интенсивности, сформированное в зоне Френеля на расстоянии 50 мм от фокальной плоскости объектива L_4 (фокусное расстояние $f_4 = 350$ мм), было записано с помощью видеокамеры (3264×2448 пикселей, размер пикселя 1,67 мкм). Фильтр нейтральной плотности F использовался для выравнивания интенсивностей объектного и опорного пучков.

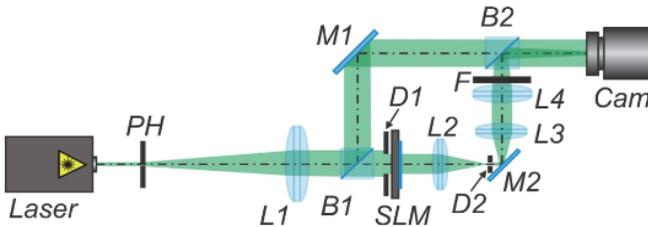


Рис. 2.3. Схема экспериментальной установки в виде интерферометра Маха-Цендера

На рис. 2.4 показаны экспериментальные ($в, г, ж, з, л, м$) и для сравнения модельные ($а, б, д, е, и, к$) картины сечения интенсивности пучка ($а, в, д, ж, и, л$) и его интерферограммы ($б, г, е, з, к, м$) в зоне Френеля (на 50 мм от фокуса линзы L_4). Пучок был сформирован мульти-спиральной фазовой пластинкой с тремя центрами сингулярности, лежащими внутри круга с радиусом 4 мм ($а, б, в, г$). По сбоям полос на интерферограммах ($б, г$) можно видеть, что в пучке присутствуют 3 оптических вихря с $TZ + 1$ (выделены белыми кружками). Таким образом, TZ всего пучка будет равен 3. Интересно, что, если центр одно из вихрей на рис. 2.4 будет находиться на краю диафрагмы ($д, е, ж, з$), то в распределении интенсивности этот «обрезанный» вихрь не проявляется ($д, ж$). А на интерферограммах ($е, з$) он проявляется в виде сближения интерференционных полос (отмечено кружком на рис. 2.4е, з). Поэтому, в данном случае, TZ всего пучка дробный 2,5. Если же центр третьего вихря находится за пределами диафрагмы, то он не проявляется ни в интенсивности пучка ($и, л$), ни на интерферограмме ($к,$

м). Заметим, что световые «ободки» вокруг нулей интенсивности на рис. 2.4а, в, д, ж, и, л были описаны в [66], и появляются из-за того, что оптический вихрь, как воронка «выбрасывает» интенсивность из своего центра на периферию.

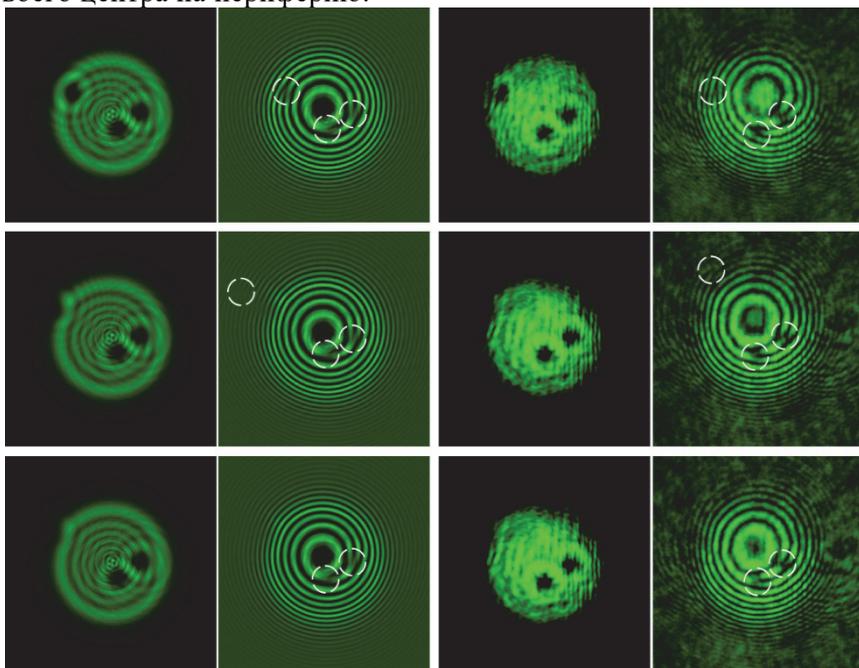


Рис. 2.4. Модельные (а, б, д, е, и, к) и экспериментальные (в, г, ж, з, л, м) распределения интенсивности без опорного пучка (а, в, д, ж, и, л) и с опорным пучком (б, г, е, з, к, м) на расстоянии 50 мм от фокус линзы L4, сформированные мульти-спиральной фазовой пластинкой (SLM), с тремя центрами сингулярности, находящимися внутри круглой диафрагмы радиусом 4 мм (а, б, в, г), с тремя центрами сингулярности, но один из которых находилась на краю диафрагмы радиусом 4 мм (д, е, ж, з) и с тремя центрами сингулярности, но один из которых находился за пределами диафрагмы радиусом 4 мм (и, к, л, м).
Размеры кадров 10×10 мм

На рис. 2.5 показаны распределения интенсивности и их интерферограммы для пучка с четырьмя оптическими вихрями в зоне Френеля, сформированного мульти-спиральной фазовой пластинкой. И так же, как на рис. 2.4е, з на рис. 2.5е, з также видно из интерферограммы, что когда центр одного из вихрей попадает на край диафрагмы, то вместо сбой полос на половину полосы, происходит сбой меньше, чем на половину полосы (выделено кружком на рис. 2.5е, з). То есть ТЗ пучка на рис. 2.5д, ж равен 3,5.

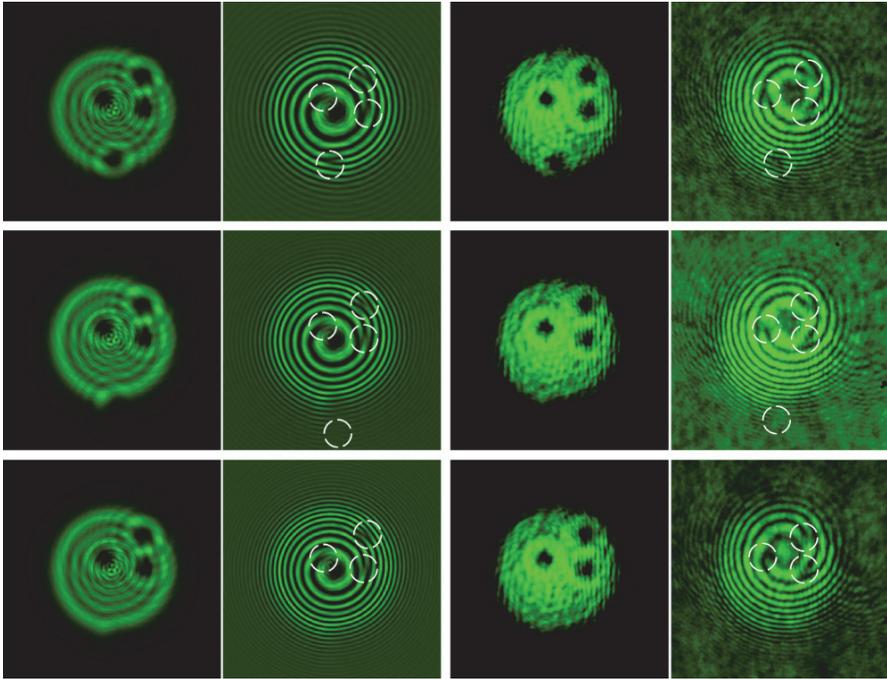


Рис. 2.5. Модельные (а, б, д, е, и, к) и экспериментальные (в, г, ж, з, л, м) распределения интенсивности без опорного пучка (а, в, д, ж, з, л) и с опорным пучком (б, г, е, з, к, м) на расстоянии 50 мм от фокус линзы L4, сформированные мульти-спиральной фазовой пластинкой (SLM), с четырьмя центрами сингулярности, находящимися внутри круглой диафрагмы радиусом 4 мм (а, б, в, г), с четырьмя центрами сингулярности, но один из которых находилась на краю диафрагмы радиусом 4 мм (д, е, ж, з) и с четырьмя центрами сингулярности, но один из которых находился за пределами диафрагмы радиусом 4 мм (и, к, л, м).

Размер кадров 10×10 мм

В заключении этого раздела заметим, что эксперимент (рис. 2.4, 2.5) согласуется с теорией (2.21).

В этом разделе рассмотрена мультиспиральная фазовая пластинка (МСФП), у которой вместо одного центра сингулярности фазы рассматриваются множество центров сингулярности одного знака, но разного порядка, расположенных в произвольных точках в плоскости спиральной пластинки. Топологический заряд такой МСФП равен сумме всех порядков каждой сингулярности, если все они лежат внутри границы круглой диафрагмы. Если некоторые центры сингулярности лежат на границе диафрагмы, то их топологический заряд учитывается с множителем $1/2$. Орбитальный угловой момент мульти-СФП (вернее поля, ко-

торое она формирует) зависит от расстояния каждого центра сингулярности от оптической оси (от центра пластинки или от центра круглой диафрагмы). Чем дальше от центра расположен центр сингулярности, тем меньше его вклад в общий ОУМ пучка. Если все центры сингулярности СФП расположены на краю диафрагмы (или вне диафрагмы), то ОУМ пучка равен нулю. Если все центры сингулярности собраны в центре СФП, то ее ОУМ максимален и совпадает с ее ТЗ. Эксперимент по формированию лазерного пучка с помощью мульти-спиральной фазовой пластинки согласуется с предсказаниями теории и с моделированием в том, что ТЗ пучка, у которого центр лежит на краю диафрагмы, дробный.

Заметим, что рассмотренная в этой работе ситуация, когда фазы оптических вихрей ограничены круглой диафрагмой, существенно отличается от ситуации, рассмотренной в [67], когда уже сформированный оптический вихрь (пучок Лагерра-Гаусса) проходит через круглое отверстие в непрозрачном экране. В [67] показано, что после диафрагмы в пучке формируются другие моды Лагерра-Гаусса с радиальными индексами как больше, так и меньше, чем у исходного пучка. В нашем случае тоже возникают дополнительные оптические вихри, но только если хотя бы один центр сингулярности, лежит на краю диафрагмы. Если же центры всех сингулярностей (вихрей) лежат внутри диафрагмы, то ТЗ пучка не зависит от радиуса диафрагмы, и равен числу вихрей с учетом их кратности.

Глава 3. Эволюция оптических вихрей с начальным дробным топологическим зарядом

3.1 Рождение оптических вихрей при распространении дробного вихря

Основными характеристиками лазерных вихревых пучков [26] являются топологический заряд (ТЗ) и орбитальный угловой момент (ОУМ). Топологический заряд оптического вихря (ОВ) формально определен Берри в [15], а ОУМ был введен в оптику в [1]. Если полный ОУМ параксиального светового поля сохраняется при распространении в свободном пространстве, то ТЗ сохраняется не всегда. Топологический заряд сохраняется при распространении, если амплитуду начального светового поля можно описать в факторизованном виде $E(r, \varphi) = A(r)\exp(in\varphi)$, где $A(r)$ – составляющая амплитуды, зависящая только от радиальной переменной r , φ – азимутальный угол, n – целое число, топологический заряд ОВ. Примерами таких световых полей являются хорошо известные пучки Бесселя-Гаусса и Лагерра-Гаусса. Примеры не сохранения ТЗ при распространении ОВ можно найти в работах [22, 38, 62, 64, 68, 69]. В [38] рассмотрена простая суперпозиция гауссова пучка и моды Лагерра-Гаусса (ЛГ) с номером $(0, n)$, причём радиусы перетяжки у гауссовых пучков разные. Из-за разной расходимости в комбинированном пучке при распространении в пространстве изменяется ТЗ. Если в начальной плоскости радиус перетяжки гауссова пучка больше радиуса перетяжки моды ЛГ, то ТЗ комбинированного пучка сначала равен нулю. По мере распространения радиусы обоих пучков выравниваются, и после этой плоскости радиус моды ЛГ становится больше, чем радиус гауссова пучка. С этого места ТЗ комбинированного пучка становится равен n . В [15] теоретически, а в [22, 64] экспериментально показано, что гауссов пучок с начальным дробным ТЗ при распространении в ближней зоне имеет целый ТЗ, равный целому числу, ближайшему к дробному числу. То есть, если начальный дробный ТЗ равен $\mu = n + \varepsilon$ ($|\varepsilon| < 1/2$), то ТЗ пучка равен n . Если начальный ТЗ равен $\mu = n + \varepsilon$ ($1/2 < |\varepsilon| < 1$), то ТЗ пучка равен $n+1$. Но оказалось, что при дальнейшем распространении таких пучков их ТЗ претерпевает и другие изменения, ранее не известные. Так в [68] численно и экспериментально показано, что в зоне Френеля ТЗ гауссова оптического вихря с начальным дробным ТЗ равен целому числу на единицу большему, чем ближайшее целое число к начальному дробному ТЗ. То есть, если начальный дробный ТЗ равен $\mu = n + \varepsilon$ ($0, 1 < |\varepsilon| < 1$), то ТЗ пучка равен $n+1$. Хотя в [68] есть неточности. Начальный пучок задан в виде

$r^{\mu} \exp(-r^2/w^2 + i\mu\varphi)$ и его Френель-образ должен быть пропорционален функции Куммера, зависящей от числа μ . Но в [68] нет функции Куммера. Аналогичное исследование провели авторы работы [62]. В [62] действительно ТЗ измеряется в Фурье-плоскости (в фокусе сферической линзы) и получены результаты, отличные от результатов работы [68]. В [62] показано, что ТЗ гауссова оптического вихря $\exp(-r^2/w^2 + i\mu\varphi)$ с дробным начальным ТЗ $\mu = (2k+1) + \varepsilon$ ($0,1 < |\varepsilon| < 1$) в дальней зоне равен $2k+1$. А если начальный дробный ТЗ равен $\mu = 2k + \varepsilon$ ($0,1 < |\varepsilon| < 1$), то в дальней зоне равен ТЗ также $2k+1$. Эти исследования показали, во-первых, что ТЗ не всегда сохраняется при распространении, а, во-вторых, что чётные и нечётные ТЗ по-разному ведут себя при распространении. Это следует из того, что какой бы дробный начальный ТЗ не был (близкий к чётному целому или близкий к нечётному целому) в дальней зоне ТЗ будет всегда целым нечётным числом. Заметим, что измерять ТЗ можно с помощью треугольной диафрагмы [34, 70] или цилиндрической линзы [24].

Заметим также, что оптический вихрь может находиться на периферии распределения интенсивности лазерного пучка, там, где интенсивность очень мала. Обнаружить экспериментально такой ОВ затруднительно, если вообще возможно. Но при расчёте по формуле, которая определяет ТЗ, такой ОВ учитывается, и величина ТЗ зависит от этого вихря. В численном эксперименте результат расчёта величины ТЗ зависит от радиуса окружности, по которой суммируют градиент фазы светового поля. Поэтому правильного результата расчёта ТЗ следует ожидать, когда согласуются все три составляющие: расчёт по формуле [15], расчёт по модельным картинкам фазы поля и экспериментальное определение ТЗ [24, 34, 70].

В данном разделе мы теоретически и численно рассмотрим эволюцию гауссова ОВ с начальным дробным ТЗ, и фактически, объединим результаты работ [15], [62] и [68]. Мы показали, что имеется всего 4 возможных варианта эволюции ОВ с начальным дробным ТЗ. Мы показали также, что в [15, 22, 64] измеряли ТЗ в ближней зоне, в работе [68] – в зоне Френеля, и в [62] – в дальней зоне.

Как правило, при распространении ОВ в атмосфере в присутствии турбулентности для идентификации ОВ измеряют ОУМ [33, 71]. Но из-за малых «дрожаний» всего пучка и его составных частей ОУМ непрерывно изменяется. Хотя при слабой турбулентности он изменяется слабо, а при сильной – сильно. Если измерять ТЗ, то он может изме-

няться только дискретно, оставаясь целым. Поэтому при слабой турбулентности ТЗ должен вообще не изменяться. Мы показали, с помощью дифракции ОВ на случайном фазовом экране, что ТЗ остаётся неизменным вплоть до существенных искажений величины случайной фазы экрана.

3.1.1 Теория Берри оптического вихря с дробным зарядом

Топологический заряд рассчитывается с помощью формулы, предложенной Берри [15]:

$$TC = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \quad (3.1)$$

Амплитуда гауссова пучка с начальным дробным топологическим зарядом имеет вид [15]:

$$E(r, \varphi, z = 0) = \exp\left(-i\mu\varphi - \left(\frac{r}{w}\right)^2\right) = \frac{\exp(i\pi\mu)e \sin \pi\mu}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp((i\pi\mu - r^2)/w^2)}{\mu - n}. \quad (3.2)$$

Амплитуда поля (3.2) в зоне Френеля выражается через разность модифицированных функций Бесселя [66]:

$$E(\rho, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-iz_0}{qz}\right) \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + i\pi\mu\right) \sin(\pi\mu) \sqrt{x} \exp(-x) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^{|m|} \frac{\exp(im\theta)}{\mu - m} \left[I_{\frac{|m|-1}{2}}(x) - I_{\frac{|m|+1}{2}}(x) \right], \quad (3.3)$$

где $x = (z_0/z)^2(\rho/w)^2/(2q)$, $q = 1 - i(z_0/z)$, $I_\nu(x)$ – модифицированная функция Бесселя.

В “ближней зоне” $z \ll z_0$ параметры в (3.3) принимают вид: $x = ik\rho^2/(2z)$, $q = -i(z_0/z)$. И так как модифицированная и обычная функции Бесселя связаны известным соотношением

$$I_\nu(ix) = i^\nu J_\nu(x), \quad (3.4)$$

то получаем в ближней зоне [15, 66]:

$$E(\rho, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + i\pi\mu\right) \times \sin(\pi\mu) \sqrt{iy} \exp(-iy) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^{|m|} \frac{\exp(im\theta)}{\mu - m} i^{(|m|-1)/2} \left[J_{(|m|-1)/2}(y) - iJ_{(|m|+1)/2}(y) \right], \quad (3.5)$$

где $y = k\rho^2/(2z)$. В пределе при $\rho \rightarrow \infty$, используя асимптотику функций Бесселя

$$J_\nu(y \gg 1) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \cos\left(y - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (3.6)$$

получим:

$$E(\rho \rightarrow \infty, \theta, z) \approx \frac{\exp(i\pi\mu) \sin(\pi\mu)}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(im\theta)}{\mu - m}. \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) совпадает с (3.2) при $w \rightarrow \infty$. Подставив (3.7) в (3.1), получим формулу для расчёта ТЗ в “ближней зоне”:

$$TC = \frac{\text{Re}}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ne^{in\varphi}}{\mu - n} \right] \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{\mu - n} \right]^{-1} d\varphi \right\}. \quad (3.8)$$

Расчёт по формуле (3.8) приводит к известной ступенчатой функции для ТЗ со скачками при $\mu = n + 1/2$ (рис. 3.1). На рис. 3.1 показана зависимость ТЗ гауссова пучка с начальным вихрем с дробным ТЗ (3.2) в “ближней зоне” ($z \ll z_0$), рассчитанного по формуле (3.8) для $-7 \leq \mu \leq 7$ с шагом 0,05, от величины начального дробного ТЗ μ .

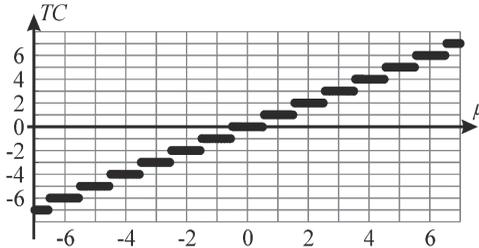


Рис. 3.1. ТЗ гауссова пучка с начальным дробным ТЗ, рассчитанный по формуле (3.8)

Как видно на рис. 3.1 скачки ТЗ имеют место при полуцелых значениях, когда $\mu = n + 0,5$, т.е. как описано в [15].

Рассчитаем далее ТЗ поля с начальным дробным ТЗ (3.2) в зоне Френеля. Для этого воспользуемся асимптотикой для модифицированной функции Бесселя при больших значениях аргумента:

$$I_{\frac{n-1}{2}}(\xi) - I_{\frac{n+1}{2}}(\xi) \sim \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}} \left\{ \left[1 - \frac{(n-1)^2 - 1}{8\xi} \right] - \left[1 - \frac{(n+1)^2 - 1}{8\xi} \right] \right\} = \frac{ne^\xi}{2\xi\sqrt{2\pi\xi}}. \quad (3.9)$$

Тогда получим с учётом асимптотики (3.9) вместо (3.3) следующее выражение:

$$E(\rho \rightarrow \infty, \theta, z) = \left(\frac{-iz}{z_0} \right) \left(\frac{w}{\rho} \right)^2 \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + i\pi\mu \right) \sin(\pi\mu) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^{|m|} \frac{\exp(im\theta)}{\mu - m} |m|. \quad (3.10)$$

Подставив (3.10) в формулу для расчёта топологического заряда (3.1), получим:

$$TC = \frac{\text{Re}}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-i)^{|n|} n |n| e^{in\varphi}}{\mu - n}}{2\pi} d\varphi \right\} \quad (3.11)$$

Рис. 3.2 показывает ТЗ гауссова пучка с начальным дробным ТЗ (3.2), рассчитанный в зоне дифракции Френеля по формуле (3.11) для $5 \leq \mu \leq 10$ с шагом 0,05.

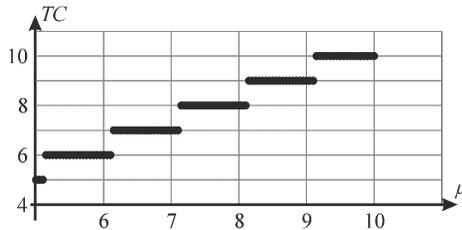


Рис. 3.2. ТЗ гауссова пучка с начальным дробным ТЗ (3.2) в зоне дифракции Френеля, рассчитанный по формуле (3.11)

Из рис. 3.2 видно, что скачки ТС находятся вблизи каждого целого числа, когда $\mu \approx n+0,1$, как описано в [68]. Но в [68] утверждали, что такая зависимость для ТЗ имеет место в зоне дифракции Фраунгофера, а не Френеля. Но в [62] так же, как в [68], исследовали ТЗ в дальней зоне (зоне дифракции Фраунгофера или в фокусе сферической Фурье-линзы), и получили другой результат.

В дальней зоне дифракции (в фокусе Фурье-линзы) амплитуда поля примет вид:

$$E(\rho, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-iz_0}{f} \right) \exp(i\pi\mu) \times \sin(\pi\mu) \sqrt{x} \exp(-x) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^{|m|} \frac{\exp(im\theta)}{\mu - m} \left[I_{(|m|-1)/2}(x) - I_{(|m|+1)/2}(x) \right], \quad (3.12)$$

где аргумент x функций Бесселя становится действительной величиной $x = (z_0/f)^2 (\rho/w)^2 / 2$, f – фокусное расстояние линзы, формирующей дальнюю зону в плоскости фокуса. Расчёт ТЗ по формуле (3.12) и по формуле (3.1) приводит к ступенчатой функции, показанной на рис. 3.3 На рис. 3.3 показан ТЗ гауссова пучка с начальным дробным ТЗ (3.2) в дальней зоне дифракции, рассчитанный по формулам (3.12) и (3.1) для $-5 \leq \mu \leq 5$ с шагом 0,05.

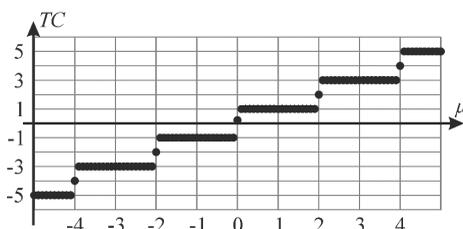


Рис. 3.3. ТЗ гауссова пучка с начальным дробным ТЗ (3.2) в Фурье-плоскости, рассчитанный по формулам (3.12) и (3.1)

Согласно рис. 3.3, скачки между соседними целочисленными значениями ТЗ происходят при чётных целочисленных значениях, как описано в [62]. Из рис. 3.3 видно, что если начальный ТЗ целый $\mu = n$, то он таким же останется в дальней зоне. Но слабые отклонения начального ТЗ от целого приводят к разным последствиям, в зависимости от того, четное или нечетное это целое число. Слабые отклонения начального ТЗ от нечетного целого числа не изменяют ТЗ в дальней зоне: он останется целым нечетным числом. Слабые отклонения начального ТЗ от целого четного числа скачком изменяют ТЗ такого оптического вихря в дальней зоне. Если начальный ТЗ немного меньше четного целого числа $2m$, то в дальней зоне ТЗ будет равен $2m - 1$. А если начальный ТЗ будет немного больше четного числа $2m$, то в дальней зоне ТЗ будет равен $2m + 1$. Авторы пока не могут объяснить, почему происходит именно так.

Из рис. 3.1–3.3 следует интересная эволюция светового поля с начальным дробным ТЗ (3.2). Из рис. 3.3 видно, что в дальней зоне любое начальное дробное поле приводит только к нечётным ТЗ. Чётные ТЗ в дальней зоне можно сформировать только, если начальное поле будет иметь целый чётный ТЗ. Действительно, пусть в начальной плоскости ТЗ равен $\mu = 3,3$. Тогда в “ближней зоне” сформируется ОВ с $ТС = 3$ (рис. 3.1), далее в зоне Френеля произойдёт рождение нового вихря с ТЗ +1 и ТЗ пучка станет равен $ТС = 4$ (рис. 3.2). А в дальней зоне произойдёт рождение другого вихря с ТЗ –1, и ТЗ пучка опять станет $ТС = 3$ (рис. 3.3), как в “ближней зоне”.

Иная эволюция у поля с начальным дробным ТЗ, близким к чётному целому числу, например, $\mu = 4,3$. В “ближней зоне” у такого пучка ТЗ равен $ТС = 4$ (рис. 3.1), в зоне Френеля он равен $ТС = 5$ (рис. 3.2), и в дальней зоне ТЗ остаётся равным $ТС = 5$ (рис. 3.3).

Есть ещё два сценария эволюции поля с начальным дробным ТЗ, которые видны из Табл. 3.1. В ней приведены все 4 возможных сценария эволюции начального дробного вихря. Если простое начальное поле

имеет целый ТЗ, то он сохраняется при распространении. Но если имеется линейная комбинация двух полей с разной расходимостью, то начальный целый ТЗ будет меняться [38].

Табл. 3.1. Сценарии изменения ТЗ при распространении гауссова пучка с начальным дробным ТЗ $\exp(-r^2/w^2+i\mu\varphi)$ (p – произвольное целое число, $0 < \varepsilon < 1/2$)

Начальный ТЗ $z=0$	ТЗ в ближней зоне $z \ll z_0$	ТЗ в зоне Френеля $z \approx z_0$	ТЗ в дальней зоне $z \gg z_0$
$\mu=2p+\varepsilon$	$2p$	$2p+1$	$2p+1$
$\mu=2p-\varepsilon$	$2p$	$2p$	$2p-1$
$\mu=(2p+1)+\varepsilon$	$2p+1$	$2p+2$	$2p+1$
$\mu=(2p+1)-\varepsilon$	$2p+1$	$2p+1$	$2p+1$

3.1.2 Моделирование

Для подтверждения расчётов величины ТЗ по формулам (3.8), (3.11) и (3.12) в разных зонах дифракции гауссова пучка с начальным дробным ТЗ было проведено моделирование. Распределения интенсивности и фазы в “ближней зоне” и зоне Френеля были получены BPM-методом (программа BeamProp фирмы RSoft) при следующих параметрах: длина волны: $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w_0 = 5\lambda$ (длина Рэлея в этом случае равна $z_R \sim 25\pi\lambda$), полуразмер расчётной области: $R = 50\lambda$, поперечный шаг дискретизации: $\Delta x = \Delta y = \lambda/32$, продольный шаг дискретизации: $\Delta z = \lambda/16$. А распределения интенсивности и фазы в дальней зоне были получены с помощью преобразования Фурье, выполненного сферической линзой с фокусным расстоянием $f = 100$ мм для гауссова пучка с радиусом перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, но с тем же начальным ТЗ. Начальный ТЗ был равен $\mu = 3,3$ (тип эволюции соответствует четвёртой строке Табл. 3.1). Расчёт в ближней зоне был на расстоянии $z = 3\lambda$, а в зоне Френеля – на расстоянии $z = 50\lambda$.

На рис. 3.4 показаны распределения интенсивности ($a, b, в$) и фазы ($г, д, е$) гауссова пучка с дробным оптическим вихрем порядка $\mu = 3,3$ в “ближней зоне” ($z = 3\lambda$) ($a, г$), в зоне Френеля ($z = 50\lambda$) ($b, д$), и в дальней зоне (в Фурье-плоскости сферической линзы с фокусным расстоянием $f = 100$ мм) ($в, е$). Стрелками на распределениях фазы показаны оптические вихри (центры сингулярностей) плюс первого порядка, а пунктирной стрелкой (на рис. 4.4e) показан оптический вихрь минус первого порядка.

Рис. 3.4 подтверждает результаты расчёта по полученным формулам (3.8), (3.11) и (3.12), которые отражены на рис. 3.1–3.3, соответственно. И подтверждает эволюцию ОВ, описанную в строке 4 Табл. 3.1. Действительно, на рис. 3.4г видно, что, хотя в начальной

плоскости ($z=0$) ТЗ был равен $\mu=3,3$, сразу же за начальной плоскостью (на расстоянии всего 3λ) у ОВ есть только 3 точки сингулярности (ТЗ равен 3). Хотя какие-то возмущения фазы с правой стороны на рис. 3.4г присутствуют, но разглядеть ещё точки сингулярности не удаётся. На рис. 3.4д на расстоянии 50λ (длина Рэлея примерно 75λ) видно, что появилась четвертая точка сингулярности (это показывает сбой полюс повыше трёх исходных точек сингулярности). Топологический заряд теперь равен 4. При дальнейшем распространении (в фокусе сферической линзы), как показано на рис. 3.4е снизу появляется ещё точка сингулярности, но с обратным знаком (-1). И полный ТЗ пучка опять стал равен начальному 3.

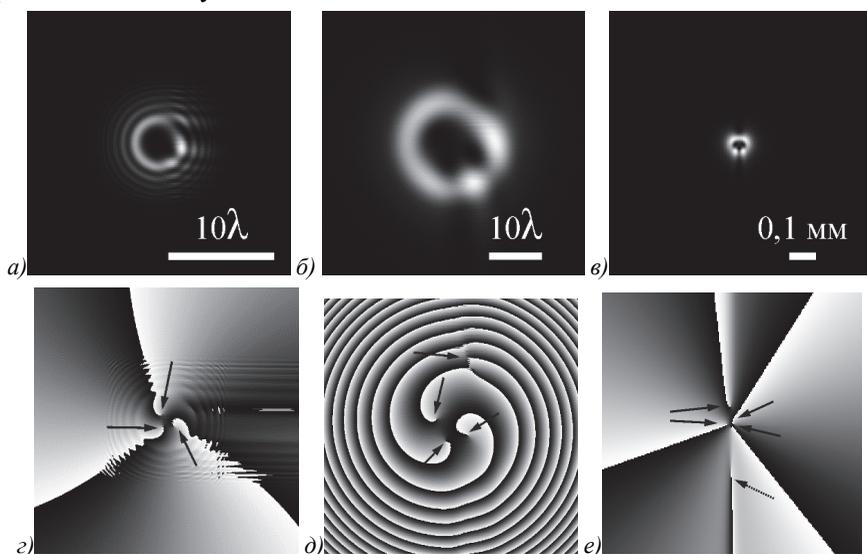


Рис. 3.4. Распределения интенсивности (а, б, в) и фазы (г, д, е) гауссова пучка с начальным орбитным ТЗ $\mu = 3,3$ в ближней зоне (а, г), в зоне Френеля (б, д), и в дальней зоне (в, е). Стрелками на распределениях фазы показаны оптические вихри плюс первого порядка, а пунктирной стрелкой (е) показан оптический вихрь минус первого порядка. Для фазы чёрный цвет – это ноль, а белый цвет – 2π

3.1.3 Эксперимент

Этот раздел посвящён изучению устойчивости ТЗ оптического вихря к фазовым искажениям. В эксперименте мы исследуем сохранение целого ТЗ при случайных фазовых искажениях вихревого лазерного пучка. Для измерения ТЗ мы используем цилиндрическую линзу [24]. Гауссов пучок с диаметром перетяжки $w = 1,1$ мм освещает пространственный модулятор света (SLM), на котором записана вихревая

фаза $m\varphi$ с $m=5$. Каждый пиксель SLM искажается добавлением числа $2\pi\alpha$ к его фазе $m\varphi$. Величина α является случайным числом в интервале $[0, 1]$. На рис. 3.5 показаны искажённые фазы, начального светового поля, записанные на SLM (левый столбец), распределения интенсивности (600×600 мкм), измеренные в фокальной плоскости сферической линзы с фокусным расстоянием $f=150$ мм (центральный столбец) и распределения интенсивности (1900×1900 мкм), измеренные на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы с фокусным расстоянием $f=100$ мм (правый столбец) для разных фазовых искажений α .

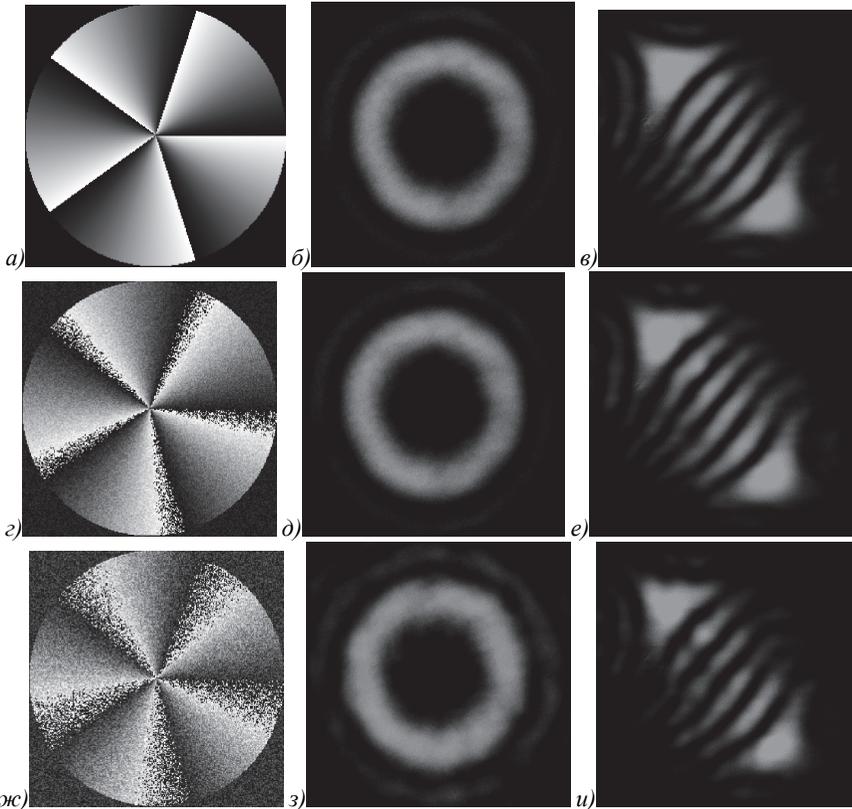
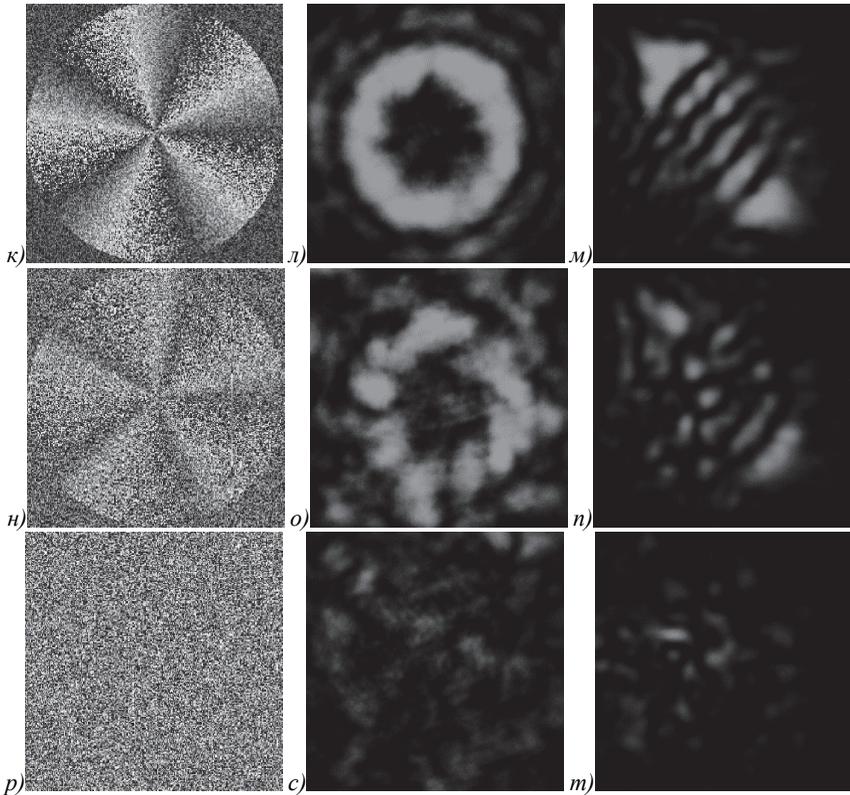


Рис. 3.5. Искажённые фазы (а, г, ж, к, н, р), распределения интенсивности (600×600 мкм) в фокальной плоскости сферической линзы с фокусным расстоянием $f=150$ мм (б, д, з, л, о, с) и распределения интенсивности (1900×1900 мкм) на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы с фокусным расстоянием $f=100$ мм (в, е, и, м, п, т) для разной степени искажения: $\alpha=0$ (а, б, в), $\alpha=0,2$ (г, д, е), $\alpha=0,4$ (ж, з, и), $\alpha=0,6$ (к, л, м), $\alpha=0,8$ (н, о, п), $\alpha=1,0$ (р, с, т)



Продолжение рис. 3.5. Искажённые фазы (а, г, ж, к, н, р), распределения интенсивности (600×600 мкм) в фокальной плоскости сферической линзы с фокусным расстоянием $f = 150$ мм (б, д, з, л, о, с) и распределения интенсивности (1900×1900 мкм) на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы с фокусным расстоянием $f = 100$ мм (в, е, и, м, п, т) для разной степени искажения: $\alpha = 0$ (а, б, в), $\alpha = 0,2$ (г, д, е), $\alpha = 0,4$ (ж, з, и), $\alpha = 0,6$ (к, л, м), $\alpha = 0,8$ (н, о, п), $\alpha = 1,0$ (р, с, т)

Согласно рис. 3.5, при $\alpha = 0,6$ (то есть фаза искажается случайным значением в интервале $[0, 1,2\pi]$), всё ещё чётко видны 6 максимумов интенсивности на диагонали под углом -45 градусов (или 5 тёмных полос, или 5 нулей интенсивности), что означает, что ТЗ оптических вихрей равен 5. Однако при $\alpha \geq 0,8$ ТЗ не может быть определен (рис. 3.5). То есть ТЗ оптического вихря остаётся целым числом равным 5 вплоть до величины случайного искажения начальной фазы ОВ, примерно равной половине длине волны ($\lambda/2$).

3.1.4 Не сохранение топологического заряда для суперпозиции оптических вихрей

Ниже мы приведём два примера комбинированных ОВ (суперпозиция двух вихрей), у которых при распространении ТЗ не сохраняется.

В [38] на примере комбинированного пучка показано, что ТЗ такого пучка при распространении не сохраняется. Но прямого вычисления ТЗ по формуле (3.1) в [38] нет. Поэтому ниже мы обобщим результат [38] и рассчитаем ТЗ суммы двух мод ЛГ с разными радиусами перетяжек с помощью прямого вычисления по формуле (3.1). Пусть амплитуда поля комбинированного пучка, состоящего из двух мод Лагерра-Гаусса $(0, n)$ и $(0, m)$ с разными радиусами перетяжек задаётся в виде

$$E(r, \varphi, z) = a \left(\frac{r}{w_1(z)} \right)^{|n|} \exp(-r^2 / w_1^2(z) + in\varphi) + b \left(\frac{r}{w_2(z)} \right)^{|m|} \exp(-r^2 / w_2^2(z) + im\varphi), \quad (3.13)$$

где $w_1(z) = w_{10}[1+(z/z_{10})^2]^{1/2}$ и $w_2(z) = w_{20}[1+(z/z_{20})^2]^{1/2}$ – радиусы перетяжек двух гауссовых пучков в (3.13), a и b – постоянные, n и m – целые топологические заряды ОВ. Подставив (3.13) в (3.1), получим:

$$\begin{aligned} TC &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{inar^n w_2^m(z) e^{-r^2/w_1^2(z) + in\varphi} + imbr^m w_1^n(z) e^{-r^2/w_2^2(z) + im\varphi}}{ar^n w_2^m(z) e^{-r^2/w_1^2(z) + in\varphi} + br^m w_1^n(z) e^{-r^2/w_2^2(z) + im\varphi}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{nar^{n-m} w_2^m(z) e^{-r^2(1/w_1^2(z) - 1/w_2^2(z)) + i(n-m)\varphi} + mbw_1^n(z)}{ar^{n-m} w_2^m(z) e^{-r^2(1/w_1^2(z) - 1/w_2^2(z)) + i(n-m)\varphi} + bw_1^n(z)} = \quad (3.14) \\ &= \begin{cases} m, & w_1(z) \leq w_2(z), \\ n, & w_1(z) > w_2(z). \end{cases} \end{aligned}$$

В (3.14) интеграл вычислялся так. Пусть $w_{10} > w_{20}$, тогда $w_1(z) > w_2(z)$ при $z < kw_{10}w_{20}/2$ и в показателе экспоненты под интегралом в (3.14) положительное число. Поэтому в пределе $r \rightarrow \infty$ в числителе и знаменателе под интегралом в (3.14) экспоненты стремятся к бесконечности быстрее, чем степень. Поэтому вторыми слагаемыми в числителе и знаменателе можно пренебречь. А оставшиеся первые слагаемые взаимно сокращаются, и остаётся только n . Поэтому ТЗ равен n . Но при $z > kw_{10}w_{20}/2$ радиус первой моды ЛГ становится меньше, чем радиус второй моды ЛГ $w_1(z) < w_2(z)$, и показатель экспоненты в интеграле (3.14) будет отрицательным числом. Поэтому в пределе $r \rightarrow \infty$ под интегралом в (3.14) первые слагаемые в числителе и знаменателе стремятся к нулю. Остаются только вторые слагаемые, которые взаимно сокращаются, и остаётся в числителе m . Поэтому ТЗ будет равен m .

И, наоборот, если $w_{10} < w_{20}$, то при $z < kw_{10}w_{20}/2$ ТЗ будет равен m , а при $z > kw_{10}w_{20}/2$ ТЗ будет равен n . Таким образом, при распространении

пучка (3.13), на некотором расстоянии рождаются (или уничтожаются) $|n - m|$ оптических вихрей с ТЗ +1.

Аналогично можно вычислить ТЗ для комбинированного пучка, у которого вместо моды ЛГ $(0, n)$ выбран гауссов вихрь [33]. У такого пучка ТЗ тоже может не сохраняться. В начальной плоскости такой комбинированный пучок имеет следующую амплитуду:

$$E(r, \varphi) = ae^{-r^2/w_1^2} + be^{-r^2/w_2^2 + i n \varphi}. \quad (3.15)$$

Преобразование Френеля для второго слагаемого в (3.15) известно [33] (любое слагаемое в (3.3)), тогда на расстоянии z вместо (3.15) получим:

$$E(\rho, \theta, z) = ae^{-\rho^2/w_1^2(z)} + \frac{b(-i)^{|m|+1}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{z_0}{qz} \right) \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\varphi \right) \sqrt{x} \times \\ \times \exp(-x) \left[I_{\frac{|m|-1}{2}}(x) - I_{\frac{|m|+1}{2}}(x) \right], \quad (3.16)$$

где $x = (z_0/z)^2(\rho/w_2)^2/(2q)$, $q = 1 - i(z_0/z)$, $z_0 = kw_2^2/2$. С учётом асимптотики (3.9) при $r \rightarrow \infty$, вместо (3.16) получим:

$$E(\rho, \theta, z) = ae^{-\rho^2/w_1^2(z)} + \frac{b(-i)^{|m|+1}|n|}{2\pi} \left(\frac{z_0}{z} \right) \left(\frac{w_2}{\rho} \right)^2 \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\varphi \right),$$

тогда ТЗ по формуле (3.1) будет равен:

$$TC = \frac{n}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{A(z)r^{-2} \exp\left(\frac{ikr^2}{2z} + in\varphi\right) d\varphi}{a \exp\left(-\frac{r^2}{w_1^2(z)}\right) + A(z)r^{-2} \exp\left(\frac{ikr^2}{2z} + in\varphi\right)} = n, \quad (3.17)$$

где

$$A(z) = \frac{b(-i)^{|m|+1}|n|}{2\pi} \left(\frac{z_0 w_2^2}{z} \right).$$

Так как экспонента в знаменателе стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ быстрее, чем обратный квадрат радиальной переменной, то в пределе в (3.17) в знаменателе останется только второе слагаемое, которое сократиться с таким же выражением в числителе. ТЗ (3.17) будет равен n в поле, а в начальной плоскости ($z=0$) ТЗ поля (3.15) будет равен нулю, либо n , в зависимости от соотношения радиусов перетяжки:

$$\begin{aligned}
TC &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{inbe^{-r^2/w_2^2 + i\varphi}}{ae^{-r^2/w_1^2} + be^{-r^2/w_2^2 + i\varphi}} = \\
&= \frac{n}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\frac{a}{b} e^{-r^2(1/w_1^2 - 1/w_2^2) - i\varphi} + 1} = \begin{cases} 0, w_1 > w_2, \\ n, w_2 > w_1. \end{cases} \quad (3.18)
\end{aligned}$$

В этом разделе теоретически показано, что гауссов пучок, в который внедрен оптический вихрь с начальным дробным ТЗ, при распространении не сохраняет начальный ТЗ. Топологический заряд гауссова пучка с начальным дробным ТЗ в разных зонах дифракции (“ближней зоне” ($z \ll z_0$), зоне Френеля ($z \approx z_0$) и дальней зоне ($z \gg z_0$)) может быть разным. Это подтверждено численным моделированием с помощью программы *BeamProp* (в ближней зоне и зоне дифракции Френеля) и с помощью преобразования Фурье (в дальней зоне). Описаны 4 типа эволюции гауссова пучка с начальным дробным ТЗ. Один из них, например, такой. Если в начальной плоскости ТЗ равен 3,3, то в “ближней зоне” ТЗ равен 3, в зоне Френеля ТЗ 4, а в зоне Фраунгофера (в фокусе сферической линзы) ТЗ опять 3. Таким образом, в этом типе эволюции в зоне Френеля появляется вихрь с ТЗ +1, а затем в дальней зоне появляется ещё один вихрь с ТЗ –1, который компенсирует ТЗ +1. Но “рождаться” в ходе распространения дополнительные ОВ могут не только в случае начального дробного заряда, но в случае комбинированного пучка, состоящего из линейной комбинации двух мод Лагерра-Гаусса с номерами $(0, n)$ и $(0, m)$ и разными радиусами перетяжек гауссовых пучков. В этом случае могут “рождаться” сразу несколько ОВ $|n - m|$. Уничтожение ОВ происходит в том смысле, что “рождаются” ещё $|n - m|$ ОВ, но с обратными по знаку ТЗ. Экспериментально показано, что при слабых случайных фазовых искажениях ОВ (величина задержки фазы меньше π) ТЗ сохраняется. Поэтому для идентификации ОВ в системах беспроводной связи можно использовать измерение ТЗ (наряду с измерением ОУМ).

У читателя может возникнуть вопрос: откуда берутся дополнительные ОВ в зоне Френеля и Фраунгофера (см. Табл. 3.1)? Ответ может быть таким. Начальное световое поле с дробным ТЗ содержит весь спектр угловых гармоник и «несет» в себе эти дополнительные ОВ. Доказательством могут служить два хорошо известных случая. Если в начальной плоскости имеется пучок Эрмита-Гаусса с номером $(0, n)$, прошедший через цилиндрическую линзу, повернутую в начальной плоскости на угол в 45 градусов к декартовым осям, то ТЗ такого пучка

в начальной плоскости равен нулю. Но на расстоянии, равном двойному фокусному расстоянию цилиндрической линзы, формируется вихревой пучок Лагерра-Гаусса (ЛГ) с номером $(0, n)$ [72]. Это означает, что «родился» оптический вихрь с ТЗ n . Другой пример. Пусть в начальной плоскости имеется суперпозиция гауссова пучка с радиусом перетяжки w_1 и оптический вихрь ЛГ с номером $(0, n)$ и радиусом перетяжки w_2 . И пусть $w_1(0) < w_2(0)$, тогда [38] в начальной плоскости и далее до расстояния z_1 ТЗ такого комбинированного пучка будет равен n . Но при $z > z_1$, когда $w_1(z) > w_2(z)$, ТЗ пучка изменится и станет равен нулю. Это означает, что из «бесконечности» (с периферии пучка) «появились» (с фазовой скоростью большей скорости света) n оптических вихрей с ТЗ -1 , которые «скомпенсировали» n оптических вихрей с ТЗ $+1$, и полный ТЗ пучка стал нулевым.

3.2 Непараксиальная эволюция оптического вихря с дробным зарядом

Оптические вихри интенсивно исследуются в последнее время. Оптические вихри характеризуются орбитальным угловым моментом [2, 3, 4, 6, 35], ОАМ-спектром [5] и топологическим зарядом [16, 43]. Топологический заряд оптических вихрей определяется как целое число 2π , на которое изменяется фаза при обходе по замкнутому контуру вокруг центра сингулярности (неопределенности). Если в гауссов пучок внедрить несколько оптических вихрей, то очевидно, что ТЗ совокупности этих вихрей будет равен сумме ТЗ каждого вихря, так как каждый из этих вихрей можно обойти по замкнутому контуру и подсчитать число 2π скачков фазы. Но возникает вопрос, а если некоторые из этих вихрей, внедрены на периферии гауссова пучка, где интенсивность почти нулевая, то нужно ли учитывать такие сингулярности при подсчете ТЗ всего пучка? С одной стороны, экспериментально такие сингулярности нельзя измерить (например, как характерные вилочки в интерференционной картине) из-за почти нулевой интенсивности пучка. А с другой стороны, при определении ТЗ по формуле Берри [15] радиус окружности, на которой измеряется ТЗ, должен быть устремлен к бесконечности. То есть по определению ТЗ пучка – это все оптические сингулярности, дающие вклад в фазу оптического вихря.

Измерять ТЗ можно с помощью подсчета вилочек на интерферограмме [73], с помощью апертурных диафрагм [34, 70], а также с помощью цилиндрической линзы [24]. Но понятно, что так можно измерить только те сингулярности фазы (или изолированные нули интенсивности), которые окружены ненулевой интенсивностью.

В работе Берри [15] впервые был рассмотрен оптический вихрь с начальным дробным ТЗ μ . Берри получил формулу, на основе которой он рассчитал ТЗ таких дробных оптических вихрей в ближней зоне. У него получилось, что ТЗ равен целому, ближайшему к дробному μ . То есть зависимость ТЗ от μ изменяется скачком: если $\mu = m + \alpha$, где $\alpha < 0,5$, то ТЗ равен m , а если $0,5 < \alpha < 1$, то ТЗ равен $m + 1$ ($m > 0$). Такая зависимость ТЗ дробного вихря от величины μ была неоднократно экспериментально подтверждена [22, 64]. Но позже появились работы, в которых такая ступенчатая зависимость со скачком при $\alpha = 0,5$ была поставлена под сомнение [62, 68].

В данном разделе на основе численного моделирования с помощью интеграла Рэлея-Зоммерфельда [74] и расчета ТЗ по формуле Берри [15] мы показали, что скачок в ступенчатой зависимости целого ТЗ поля оптического вихря от начального дробного ТЗ μ происходит не при $\alpha = 0,5$, а при $\alpha = 0,12$.

Заметим, что оптические вихри как топологический объект возникают во многих областях физики. Так впервые дробные вихри были рассмотрены в чистой сверхтекучей жидкости в работе [75]. И были впоследствии экспериментально обнаружены в [76], в неоднородной сверхтекучей жидкости. В [76] было замечено, что существует скрытая фаза, дополняющая дробный топологический заряд вихря до целого значения. Это фаза Берри-Панчаратнама, которая проявляется в векторных квантовых полях при обходе сингулярности. Дробный заряд исчезает в векторных состояниях поля. А.В. Воляр и соавторы показали [69], что в оптическом случае в неоднородной среде фотонного кристалла дробный заряд в компонентах векторного поля становится целым в каждой компоненте за счет неадиабатического отслеживания поляризации при обходе сингулярностей. Дробные вихри изучались также в «экситонном поляритонном конденсате» [77] и была показана стабильность полупространственных квантовых вихрей в таких средах [78].

В данном разделе мы рассмотрим численно эволюцию дробного оптического вихря в свободном пространстве с помощью непараксиального скалярного интеграла Рэлея-Зоммерфельда.

3.2.1 Топологический заряд начального дробного вихря в ближней зоне

Цель работы исследовать численно эволюцию оптического гауссова вихря с начальным дробным топологическим зарядом:

$$E_x(r, \varphi) = \exp(-r^2/w^2 + i\mu\varphi), \quad (3.19)$$

где μ – ТЗ, действительное число, w – радиус перетяжки гауссова пучка. Топологический заряд будем рассчитывать по формуле [15]:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \quad (3.20)$$

Заметим, что в определении ТЗ (3.20) присутствует предел к бесконечности радиальной переменной амплитуды светового поля. То есть согласно этому определению для нахождения ТЗ светового поля, амплитуда которого является аналитической целой функцией и стремится к нулю на бесконечности (но не равна нулю), нужно учитывать сингулярности, центры которых расположены в любой точке двумерного пространства. В том числе и там, где интенсивность светового поля почти равна нулю.

Амплитуда и фаза светового поля рассчитывались с помощью интеграла Рэлея-Зоммерфельда [74]. Параметры моделирования: размер начального поля 8×8 мкм, 400×400 отсчетов (величина отсчета примерно $\lambda/30$), длина волны $\lambda = 0,532$ мкм, радиус перетяжки гауссова пучка $w = 1,3$ мкм, начальный ТЗ $\mu = 2,2$. Амплитуда и фаза начального поля показана на рис. 3.6. Заметим, что в ближнем поле на расстоянии меньше длины волны, скалярный интеграл Рэлея-Зоммерфельда конечно дает приближенное решение, так как не учитывает векторного характера поля и не учитывает затухающих волн. Но в данном разделе мы хотели только найти, где расположены дополнительные центры сингулярности в ближней зоне.

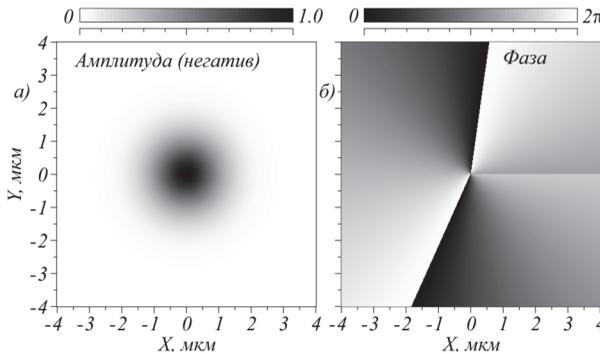


Рис. 3.6. Начальное поле с дробным топологическим зарядом $\mu = 2,2$ при $z = 0$

Из рис. 3.7 видно, что ТЗ в начальной плоскости дробный и равен 2,2. На рис. 3.8 показаны амплитуда и фаза поля (3.6) в ближнем поле на расстоянии $z = 0,03$ мкм, рассчитанные с помощью интеграла Рэлея-Зоммерфельда. Заметим, что

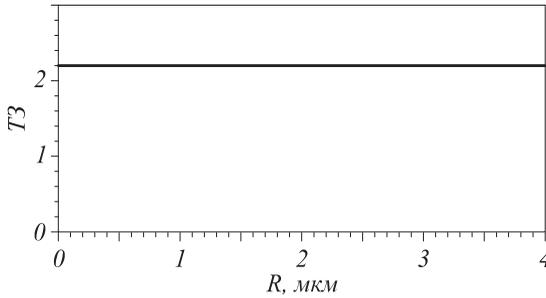


Рис. 3.7. Зависимость $T3$ от радиуса R окружности, на которой рассчитывался $T3$ по формуле (3.20), для начального поля на рис. 3.6

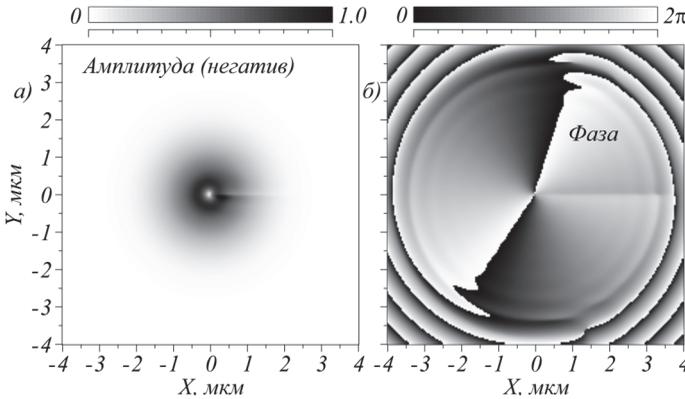


Рис. 3.8. Поле (3.19) на расстоянии $z = 0,03$ мкм (ближнее поле).
Размер поля 8×8 мкм

На рис. 3.9 показан $T3$ в зависимости от радиуса окружности R , на котором рассчитывался $T3$ по формуле (3.20) для фазы на рис. 3.8б.

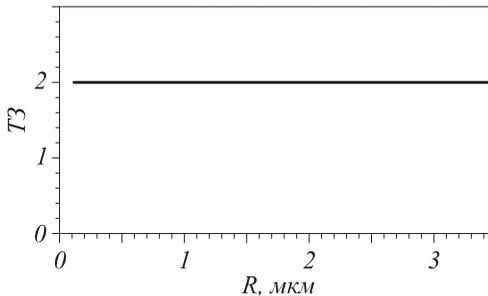


Рис. 3.9. Зависимость $T3$ от радиуса окружности для поля на рис. 3.8 ($z = 0,03$ мкм)

Из рис. 3.9 видно, что $T3$ в ближнем поле равен 2. Этот результат согласуется со многими экспериментальными работами [22, 24, 34, 64, 70], в которых измеряли $T3$ дробных оптических вихрей с помощью

диафрагм [70] или цилиндрической линзы [24]. Но так ли это? Что будет, если увеличить радиус R , на котором рассчитывается ТЗ? На рис. 3.10 показана зависимость ТЗ от радиуса при начальном ТЗ равном $\mu=2,2$ и для расстояния $z=0,01$ мкм и $z=0,1$ мкм.

Из рис. 3.10 видно, что в ближней зоне ТЗ пучка равен 3 начиная с радиуса $R > 4$ мкм. Видно так же, что фаза поля на расстояниях $z=0,01$ и $z=0,1$ мкм остается одинаковой во всем поле за исключением центральной части $R < 4,5$ мкм. Итак, при начальном ТЗ 2,2 в ближней зоне на расстоянии всего $z=0,01$ мкм ТЗ оптического вихря равен 3.

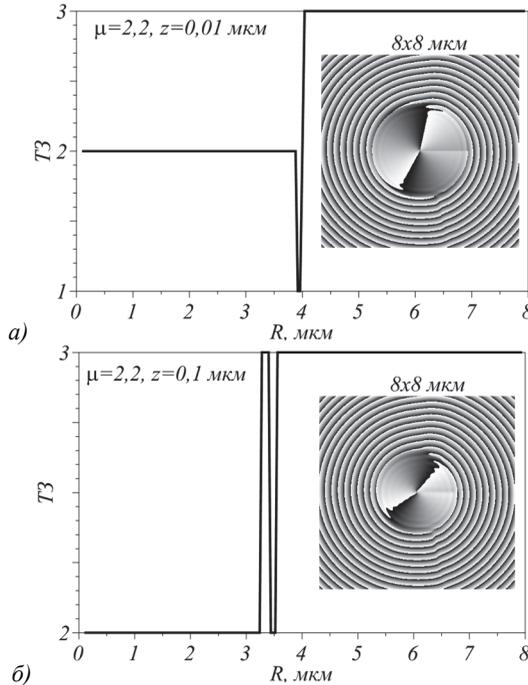


Рис. 3.10. Зависимость ТЗ пучка от радиуса R окружности для начального пучка с ТЗ $\mu = 2,2$ в ближней зоне на расстояниях $z = 0,01$ мкм (а) и $z = 0,1$ мкм (б) и фаза этих пучков на вставках соответственно

Почему это моделирование противоречит эксперименту [34, 70]? Дело в том, что, как видно из рис. 3.6, интенсивность оптического вихря спадает почти до нуля в круге с радиусом около 2 мкм, а радиус окружности R , на котором ТЗ меняется с 2 на 3 примерно равен 4 мкм. То есть дополнительный центр сингулярности находится там, где его экспериментально нельзя обнаружить. Действительно, на рис. 3.8 ($z=0,03$ мкм, $\mu=2,2$) интенсивность на радиусе R перехода ТЗ от 2 к 3

($R=4$ мкм) равна $1,6 \cdot 10^{-7}$ по отношению с максимальной интенсивности на рис. 3.8. А на рис. 3.10 ($z=0,1$ мкм, $\mu=2,2$) на радиусе перехода ТЗ с 2 к 3 ($R=3,5$ мкм) интенсивность равна $2,0 \cdot 10^{-6}$ от максимального значения. Интенсивность такой величины нельзя измерить экспериментально.

Понятно, что у оптического вихря с начальным целым ТЗ равным 2 этот ТЗ будет сохраняться. Возникает вопрос: с какого начального дробного ТЗ $\mu > 2$ в ближней зоне ТЗ будет равен 3? Моделирование показало, что для ближней зоны $z=0,01$ мкм ТЗ поля равен 2 для $2 < \mu < 2,12$. То есть можно сделать вывод, что в ближней зоне ($z < \lambda$) ТЗ гауссова пучка (3.19), имеющего начальный дробный ТЗ в диапазоне $2 < \mu < 2,12$ остается равным 2, при большем значении $2,12 < \mu < 3$ он становится равным 3.

3.2.2 Топологический заряд начального дробного вихря в зоне Френеля

На рис. 3.11 показана фаза поля (3.19) на расстоянии $z=1$ мкм и с начальным ТЗ $\mu=2,4$. Из рис. 3.11б видно, что ТЗ такого вихря в зоне Френеля равен 3.

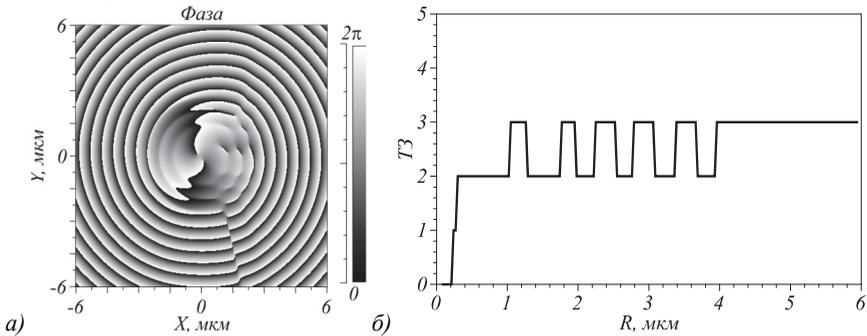


Рис. 3.11. Распределение фазы при $z=1$ мкм (а) и зависимость ТЗ от радиуса R окружности, по которой этот ТЗ рассчитывается (б). Начальный ТЗ $\mu=2,4$

На рис. 3.12 показана зависимость радиуса R , на котором происходит смена ТЗ с 2 на 3 в зависимости от расстояния z в зоне Френеля.

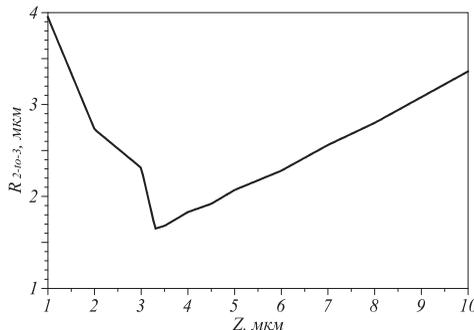


Рис. 3.12. Зависимость радиуса смены ТЗ с 2 на 3 от расстояния z для начального ТЗ $\mu=2,4$

На рис. 3.13 показано, что при увеличении дробной части начального ТЗ радиус окружности R , на которой происходит переход ТЗ с 2 на 3 уменьшается.

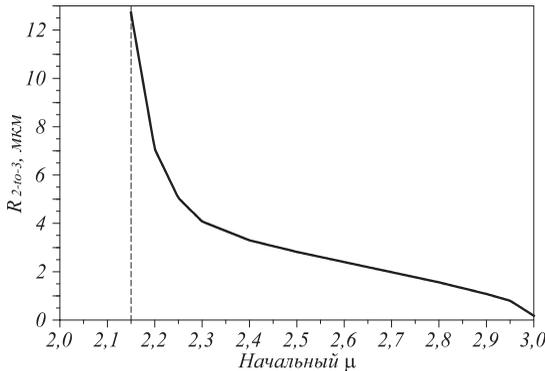


Рис. 3.13. Зависимость радиуса R перехода ТЗ с 2 на 3 от начального ТЗ μ при $z = 10$ мкм

Таким образом, для оптического вихря (3.19) с начальным дробным ТЗ из интервала $2,12 < \mu < 3$ в зоне дифракции Френеля ТЗ будет равен 3. График на рис. 3.13 отражает еще одну интересную особенность. Будем считать, что R – это расстояние от центра поля (гауссова пучка) до третьей сингулярности. Тогда с ростом дробной части начального ТЗ от 0,15 до 0,95 третья сингулярность приближается с периферии (где почти нулевая интенсивность, и ее нельзя обнаружить) к центру гауссова пучка. И начиная, примерно с ТЗ 2,5 достигает расстояния от центра около 3 мкм, где интенсивность уже можно измерить и обнаружить эту сингулярность. Таким образом, график на рис. 3.13 объясняет почему в эксперименте [22, 24, 34, 64, 70] переход ТЗ с 2 на 3 происходил при дробной части начального ТЗ равного 0,5. В заключении этого подраздела заметим, что график аналогичный рис. 3.13 мы получали и для начальных дробных ТЗ от 3,1 до 4. Поэтому можно утверждать, что аналогичный график (рис. 3.13) будет при начальном ТЗ $t < \mu < t+1$, при любом целом t . Фактически, наше исследование связало между собой результаты работы [15] (скачок ТЗ, когда дробная часть равна 0,5) и результат работы [68] (переход ТЗ происходит при любой дробной части).

3.2.3 Топологический заряд начального дробного вихря в дальней зоне

Рассмотрим ТЗ в дальней зоне. На рис. 3.14 представлена амплитуда и фаза поля на расстоянии $z = 20$ мкм для начального поля (3.19) (рис. 3.6). Начальное поле имеет ТЗ $\mu = 2,2$, размер поля – 32×32 мкм (400×400 отсчетов).

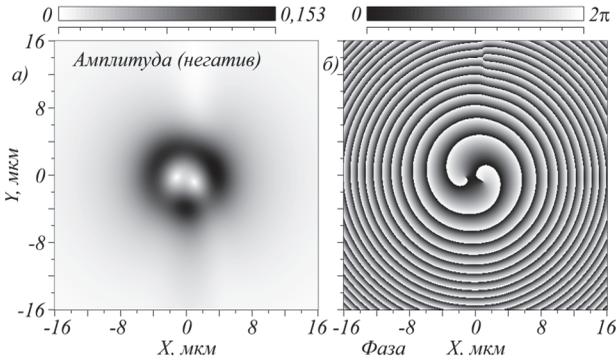


Рис. 3.14. Амплитуда (а) и фаза (б) поля при $z = 20$ мкм

На рис. 3.15 показана зависимость ТЗ для поля на рис. 3.14 от радиуса R окружности, на которой рассчитывался ТЗ. Видно, что ТЗ переходит с 2 на 3 при радиусе $R > 14$ мкм. Это видно и из рис. 3.14б – на данном радиусе на изображении фазы находится вилочка (сверху над центром), начиная с которой и меняется ТЗ оптического вихря. Сравнивая амплитуду и фазу на рис. 3.14 видно, что вилочка (третий вихрь) находится на периферии пучка, где интенсивность почти нулевая. В эксперименте этот вихрь обнаружить нельзя.

На рис. 3.16 показана зависимость радиуса R окружности, на котором ТЗ меняется с 2 на 3 (на таком расстоянии от центра расположена вилочка в фазе на рис. 3.14б) от расстояния z для параметров вихревого пучка: поле размером 8×8 мкм, 400×400 отсчетов, $\lambda = 0,532$ мкм, $w = 1,3$ мкм, $\mu = 2,2$. Длина Рэлея равна $z_R = \pi w_0^2 / \lambda = 9,98$ мкм. Из рис. 3.16 видно, что с ростом расстояния z вилочка все дальше «уходит» от центра, и поэтому растет радиус R , на котором ТЗ переходит с 2 на 3.

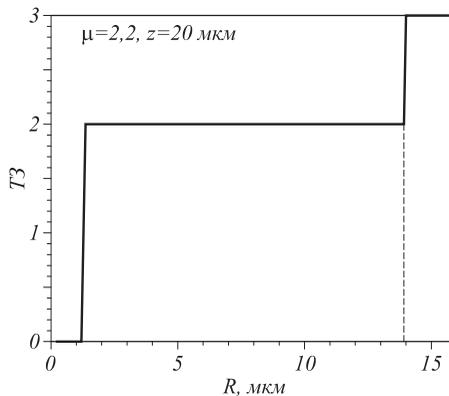


Рис. 3.15. ТЗ в зависимости от радиуса R для поля на рис. 3.14

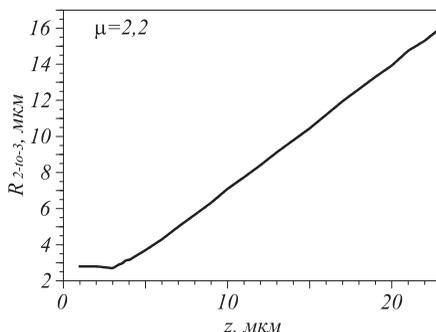


Рис. 3.16. Зависимость радиуса, на котором происходит смена топологического заряда с 2 на 3 от расстояния z от начальной плоскости для дробного заряда $\mu = 2,2$

Из рис. 3.16 видно, что зависимость перехода ТЗ с 2 на 3 при начальном $\mu = 2,2$ линейная $R_{2 \rightarrow 3} \approx 0,71 + 0,665z$ при $z > 3$ мкм. То есть, на расстоянии $z = 100$ мкм логично ожидать нахождение «вилочки» на радиусе 67,2 мкм от центра. Проверим это. На рис. 3.17 показана рассчитанная фаза поля (3.19) на расстоянии $z = 100$ мкм в координатах $-16 < x < 16$ мкм, $51,2 < y < 83,2$ мкм, центр изображения находится в точке с координатами $(0; 67,2)$ мкм).

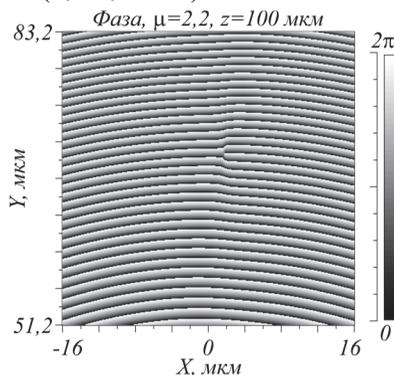


Рис. 3.17. Фаза поля (3.19) при начальном ТЗ $\mu = 2,2$ в дальней зоне при $z = 100$ мкм в границах $-16 < x < 16$ мкм, $51,2 < y < 83,2$ мкм, 400×400 отсчетов

Вилочка (центр сингулярности оптического вихря) при этом находится почти в центре изображения (рис. 3.17), а именно, в точке с координатами $(1,6$ мкм; $69,84$ мкм), что доказывает верность предположения о линейном законе смещения «вилочки» от расстояния z .

Таким образом, если начальный ТЗ оптического вихря (3.19) лежит в диапазоне $2,12 < \mu < 3$, то при распространении такого пучка его ТЗ будет равен 3 в любой зоне дифракции. Оптические вихри с начальным ТЗ из диапазона $2 < \mu < 2,12$ распространяются по другому сценарию: во

всех зонах дифракции ТЗ остается равным 2. На рис. 3.18 показаны фазы оптического вихря с начальным ТЗ $\mu = 2,11$ на разных расстояниях z : 1 мкм (а), 3 мкм (б) и 20 мкм (в). Для всех фаз ТЗ равен 2. Дополнительного центра сингулярности (вилочки) не возникает (или он находится слишком далеко от оптической оси, чтобы быть обнаруженным при моделировании). Из рис. 3.18г видно, что в ближней зоне для начального ТЗ $\mu = 2,12$ формируется краевая дислокация, то есть вертикальная линия нулевой интенсивности. При распространении из этой краевой дислокации не возникает винтовая дислокация (изолированный ноль интенсивности), или он возникает далеко от центра, так что его трудно обнаружить при моделировании. Заметим, что наше моделирование простиралось до таких расстояний от центра пучка, на которых интенсивность составляла 10^{-14} от максимальной интенсивности в пучке.

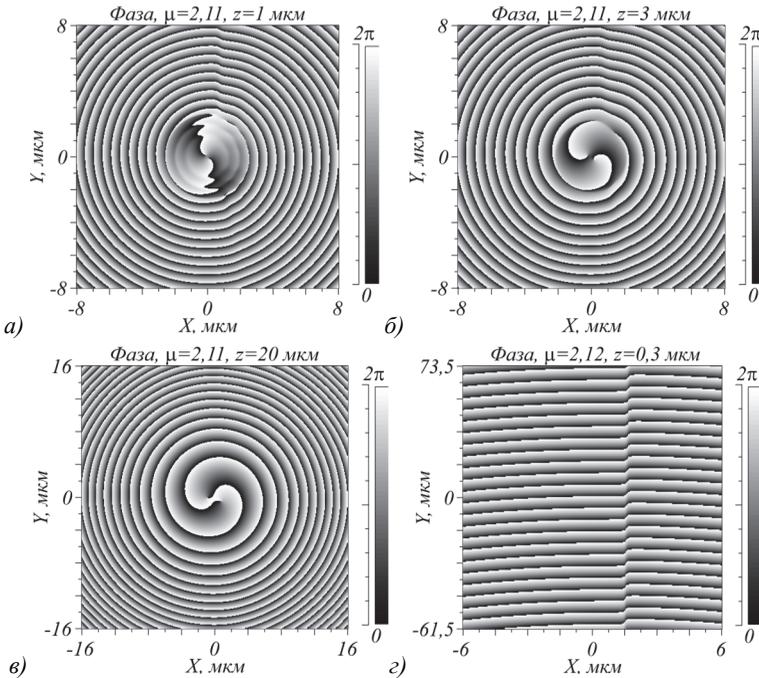


Рис. 3.18. Фаза поля на расстояниях $z = 1, 3, 20$ мкм (а, б, в) для поля с начальным ТЗ $\mu = 2,11$. Размеры изображений равны 16×16 мкм, 16×16 мкм, 32×32 мкм, соответственно. И фаза на расстоянии $z = 0,3$ мкм (г) на периферии пучка при $\mu = 2,12$ (размер кадра $-6 < x < 6$ мкм; $60 < y < 75$ мкм)

Интересно, что оптические вихри с четным и нечетным целым ТЗ эволюционируют по-разному. Было проведено моделирование при следующих параметрах: $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 3$ мкм. Начальный

дробный ТЗ пучка (3.19) менялся в диапазоне $3 < \mu < 4$. Начальный гауссов пучок был умножен на сферическую функцию с радиусом $f = 10$ мкм. Реальное фокусное расстояние составило $z = 9,236$ мкм (на данном расстоянии наблюдается максимум интенсивности на оптической оси при $\mu = 0$). Таким образом, в фокусе линзы все значения рассчитаны на этом z . Из результатов моделирования следует, что в диапазоне $3,0 < \mu < 3,11$ дополнительных вихрей нет, верхние еще не сформировались, нижние тоже. Соответственно, ТЗ пучка равен $m = 3$. На рис. 3.19 показаны распределение фазы размером 16×16 мкм (на вставках) и зависимость ТЗ пучка от радиуса R окружности, на котором измерялся ТЗ ($a, б, в$).

Из рис. 3.19 видно, что для нечетного начального целого ТЗ ($m = 3$) эволюция вихря с дробным ТЗ отличается от эволюции вихря с начальным четным ТЗ, рассмотренного ранее. Действительно, если дробная часть меньше половины, то ТЗ всего пучка $m = 4$ (согласуется с [68]) (рис. 3.19а). Если дробная часть равна половине, то ТЗ пучка в дальней зоне $m = 3$ (согласуется с [62]) (рис. 3.19б). Если дробная часть больше половины, то опять ТЗ равен $m = 4$ (согласуется с [15,68]).

В этом разделе с помощью моделирования показано, что если начальный ТЗ оптического вихря не целый $\mu = m + \alpha$, $\alpha \ll 1$, то во всех зонах дифракции где-то на периферии пучка (где интенсивность почти нулевая) формируется оптический вихрь с ТЗ $+1$ ($m > 0$). То есть ТЗ всего пучка с начальным дробным ТЗ равен $m + 1$. Экспериментально его нельзя обнаружить. С ростом z этот дополнительный вихрь удаляется еще дальше от оптической оси. Если дробная часть α растет, то дополнительный вихрь приближается к оптической оси, и начиная с $\alpha > 0,5$ он приближается настолько, что его можно экспериментально обнаружить. Поэтому в известных экспериментах [22, 24, 34, 64, 70] смена ТЗ с m на $m + 1$ происходила при дробной части $\alpha = 0,5$. Скорее всего, этот переход ТЗ с m к $m + 1$ наступает при любом $\alpha > 0$, но моделирование дает границу перехода при $\alpha = 0,12$. Наши результаты согласуются с результатами, полученными в [68]. Но в [68] не было такого глубокого моделирования: не была определена граница перехода ($\alpha = 0,12$), не было моделирования в ближней зоне ($z \ll \lambda$), не найдена зависимость расстояния от центра R , на котором появляется дополнительный вихрь (винтовая дислокация) от величины дробной части начального ТЗ μ (рис. 3.13). Фактически, мы своим моделированием согласовали результаты работ [22, 24, 34, 64, 70] и работы [68], которые первоначально противоречили друг другу. Но есть в нашем моделировании и отличия от всех предыдущих работ. Это – поведение ТЗ в фо-

кусе сферической линзы для начального дробного ТЗ, целая часть которого нечетная $m = 2k + 1$. При малой дробной части ($\alpha < 0,1$) ТЗ всего пучка равен m , при дробной части меньше половины ТЗ равен $m + 1$, при дробной части, равной половине, ТЗ равен опять m , а при дробной части больше половины ТЗ равен опять $m + 1$. Такая зависимость ТЗ пучка в дальней зоне для нечетной целой части начального дробного ТЗ от величины дробной части не согласуется ни с одной из приведенных работ.

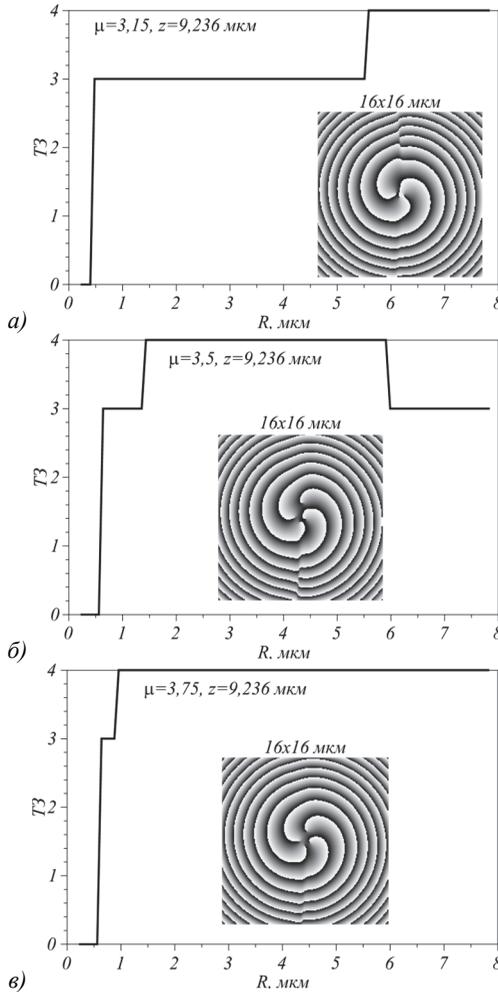


Рис. 3.19. Распределение фазы размером $32 \times 32 \mu\text{m}$ (вставки на а, б, в) и зависимость ТЗ пучка от радиуса R окружности, на котором измерялся ТЗ, для разных начальных дробных значений μ : 3,15 (а), 3,5 (б), 3,75 (в)

Глава 4. Астигматическое преобразование краевых дислокаций в вихревые

4.1 Преобразование двух краевых дислокаций первого порядка

Оптические вихри интенсивно исследуются в настоящее время [26]. Формировать лазерные оптические вихри можно множеством разных способов. Вот только некоторые из них: цифровая голограмма с несущей частотой [79, 80], амплитудная дифракционная решетка с вилочкой [81], модовый конвертор [72], спиральная фазовая пластинка [61, 82], спиральный аксикон [83, 84], q -пластинка [85], интерферометр [86], модулятор света [87], компоненты фотоники с метаповерхностью [88], микролазер [89] и простой делитель пучка [90]. Мы остановимся на наиболее простых способах.

В замечательной работе Абрамочкина и Волостникова [72] показано, как с помощью астигматического конвертора безвихревой пучок Эрмита-Гаусса (ЭГ) преобразуется в вихревой пучок Лагерра-Гаусса (ЛГ). В этой работе пучок Эрмита-Гаусса (n, m) преобразуется в моду Лагерра-Гаусса $(n, m - n)$ всего с помощью одной цилиндрической линзы ($m > n$). Нам сейчас интересно в этой работе то, что прямые линии нулевой интенсивности, присутствующие в распределении интенсивности пучка ЭГ в начальной плоскости, после цилиндрической линзы, распространяясь в свободном пространстве, преобразуются и формируют на оптической оси один изолированный ноль интенсивности, вокруг которого формируется оптический вихрь ЛГ. Таким образом, в [72] показан пример, когда в начальной плоскости и на некотором расстоянии вдоль оптической оси у пучка нет изолированного нуля интенсивности, нет оптического вихря и нет топологического заряда (ТЗ). Но, начиная с некоторой плоскости, в распределении интенсивности этого пучка, формируется ноль интенсивности, вокруг которого формируется оптический вихрь, и ТЗ становится отличным от нуля целым числом. То есть этот пример показывает, что ТЗ, в отличие от орбитального углового момента (ОУМ), не сохраняется при распространении параксиального светового пучка.

Известны также работы, в которых оптические вихри формируются с помощью малых отверстий в непрозрачном экране, совокупность которых образует кривую линию в виде спирали Архимеда [91, 92] или спирали Ферма [93, 94]. Но теоретический анализ таких структур затруднителен. В [95, 96, 97, 98] исследуется взаимодействие оптического

вихря и краевой дислокации (линии нулевой интенсивности), внедренных в гауссов пучок. В этих работах показано, что это взаимодействие приводит к расщеплению краевой дислокации и формированию дополнительных оптических вихрей. Это интересные работы и заслуживают более глубокого изучения, но в [95, 96, 97, 98] не используется астигматическое преобразование с помощью цилиндрической линзы.

В данном разделе мы детально проследим на простом примере, при каком условии прямые линии нулей (краевые дислокации) интенсивности в начальной плоскости, после астигматического преобразования с помощью цилиндрической линзы, расположенной под углом 45 градусов к декартовым осям, формируют изолированный ноль интенсивности и оптический вихрь с целым ТЗ.

4.1.1 Комплексная амплитуда на двойном фокусном расстоянии

Рассмотрим две вертикальные линии нулей интенсивности (две краевых дислокации), внедренные в перетяжку гауссова пучка с астигматической фазой. То есть в плоскости перетяжки гауссова пучка с двумя смещенными краевыми дислокациями расположена идеальная тонкая цилиндрическая линза, образующая которой повернута в плоскости перетяжки на 45 градусов. Комплексная амплитуда такого светового поля в начальной плоскости имеет вид:

$$E(x, y, z = 0) = \left(\frac{x^2 - a^2}{w^2} \right) \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2} - \frac{ik}{4f} (x + y)^2 \right), \quad (4.1)$$

где k – волновое число света, w – радиус перетяжки гауссова пучка, (x, y) – поперечные декартовы координаты и z – продольная координата вдоль оптической оси, f – фокусное расстояние цилиндрической линзы. Две вертикальные линии нулей интенсивности в (4.1) находятся на расстояниях $+a$ и $-a$ от вертикальной оси y . Второе слагаемое в показателе экспоненты в (4.1) описывает распределение фазы цилиндрической линзы с параболическим профилем, расположенной под углом 45 градусов к осям x и y .

Наша цель – определить при каком условии на оптической оси сформируется оптический вихрь с $\text{TЗ} = -2$. Уверенность в том, что пучок (4.1) должен при определенных условиях сформировать пучок ЛГ с номером $(0, 2)$, основана на результатах работы [72] и на том, что первый сомножитель в (4.1) при определенном значении a является многочленом Эрмита $H_2(x) = x^2 - 1$ с аргументом вида $\sqrt{2}x/w$.

Амплитуда светового поля (4.1) на расстоянии $z = 2f$, полученная с помощью преобразования Френеля, будет иметь вид:

$$E(\xi, \eta, z = 2f) = \left(\frac{-i\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \right) \times \left[\frac{1}{2(1+\gamma^2)} - \left(\frac{a}{w} \right)^2 - \frac{\gamma^2 (\xi - i\gamma\eta)^2}{w^2 (1+\gamma^2)^2} \right] \times \exp \left(-\frac{\gamma^2 (\xi^2 + \eta^2)}{w^2 (1+\gamma^2)} + \frac{i\gamma}{w^2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{2i\gamma^3 \xi \eta}{w^2 (1+\gamma^2)} \right), \quad (4.2)$$

где $\gamma = z_0/(2f)$, $z_0 = kw^2/2$. В (4.2) z_0 – длина Рэлея. Из (4.2) следует, что у гауссова пучка на двойном фокусном расстоянии изменился радиус перетяжки $w(z = 2f) = w\gamma^{-1}\sqrt{1+\gamma^2}$ и появилась астигматическая фаза. Амплитуда гауссова пучка в (4.2) умножается на функцию $F(\xi, \eta)$ вида $F(\xi, \eta) = A - B\xi^2 + C\eta^2 + iD\xi\eta$, где

$$A = \frac{1}{2(1+\gamma^2)} - \left(\frac{a}{w} \right)^2, \quad B = \frac{\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2 w^2}, \quad (4.3)$$

$$C = \frac{\gamma^4}{(1+\gamma^2)^2 w^2}, \quad D = \frac{2\gamma^3}{(1+\gamma^2)^2 w^2}.$$

Интенсивность пучка (4.2) будет иметь по два изолированных нуля, лежащих на вертикальной оси η , если $A < 0$, или лежащих на горизонтальной оси ξ , если $A > 0$. И только при $A = 0$, у пучка (4.2) будет один изолированный ноль на оптической оси ($\eta = 0$). Координаты пар нулей интенсивности для пучка (4.2) можно найти из (4.3):

$$\begin{aligned} 1) A < 0, \quad \xi = 0, \quad \eta = \pm\eta_0 = \pm \left[(1+\gamma^2)(2a^2(1+\gamma^2) - w^2) \right]^{1/2} (\sqrt{2}\gamma)^{-1}; \\ 2) A > 0, \quad \eta = 0, \quad \xi = \pm\xi_0 = \pm \left[(1+\gamma^2)(w^2 - 2a^2(1+\gamma^2)) \right]^{1/2} (\sqrt{2}\gamma)^{-1}; \\ 3) A = 0, \quad \xi = \eta = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Условие $A > 0$ означает, что две вертикальные линии нулей в начальной плоскости расположены близко к оси η ($a < w/\sqrt{2(1+\gamma^2)}$) и формируют на расстоянии $z = 2f$ два изолированных нуля интенсивности, лежащих на оси ξ (выражение 2) в (4.4). И наоборот, если $A < 0$, то две вертикальные линии нулей в начальной плоскости расположены дальше от оси η ($a > w/\sqrt{2(1+\gamma^2)}$) и формируют тоже два изолированных нуля интенсивности, но лежащих на оси η (выражение 1) в (4.4). И только при $A = 0$, когда выполняется условие:

$$a = \frac{w}{\sqrt{2(1+\gamma^2)}}, \quad (4.5)$$

две линии нулей интенсивности в (4.1) сформируют один изолированный ноль интенсивности на оптической оси ($\xi = \eta = 0$), вокруг которого сформируется оптический вихрь с ТЗ = -2. Из (4.5) видно, что для получения оптического вихря с одним нулем интенсивности на оптической оси, линии нулей интенсивности на входе не должны отстоять слишком далеко друг от друга, так как есть максимальное расстояние между ними: $a < w/\sqrt{2}$ (при любом γ).

Из приведенных выше рассуждений следует такая эволюция нулей в плоскости на двойном фокусном расстоянии в зависимости от расстояния между линиями нулей интенсивности в начальной плоскости. Пусть линия нулей одна (второго порядка) и совпадает с осью η , тогда в выходной плоскости будет два нуля на горизонтальной оси на максимальном расстоянии от центра, равном

$$\xi_{\max} = \pm w(1 + \gamma^2)^{1/2} (\sqrt{2}\gamma)^{-1}.$$

Пусть далее линия нулей разделяется на две симметричных линии относительно вертикальной оси, и расстояние между ними увеличивается. Тогда два нуля, находящиеся в выходной плоскости ($z = 2f$) на максимальном расстоянии ξ_{\max} начинают двигаться к центру. И когда половина расстояния между двумя линиями нулей интенсивности достигнет критического значения: $x_k = a = w[2(1 + \gamma^2)]^{-1/2}$ (условие (4.5)), тогда два нуля в выходной плоскости « сольются » в один ноль 2-го порядка в центре. Если далее продолжить увеличивать расстояние между двумя линиями нулей интенсивности в начальной плоскости, то ноль 2-го порядка разделится опять на два нуля в выходной плоскости, но которые уже будут лежать на вертикальной оси симметрично относительно начала координат. И этому процессу уже не будет конца, так как при увеличении расстояния между линиями нулей до бесконечности, нули интенсивности в выходной плоскости также будут стремиться к $\pm \infty$ вдоль оси η .

Рассмотрим далее какой оптический вихрь формируется на двойном фокусном расстоянии для начального пучка (4.1) при условии (4.5). Из (4.2) при условии (4.5) следует, что вокруг оптической оси сформировался эллиптический вихрь, внедренный в гауссов пучок с астигматической фазой и с амплитудой вида:

$$(\xi - i\gamma\eta)^2 = \rho^2 \exp(-i2\theta). \quad (4.6)$$

Чтобы получить положительный ТЗ, равный +2, цилиндрическая линза должна быть повернута на -45 градусов. Правая часть в (4.6) получена в полярных эллиптических координатах:

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos \theta, \\ \eta = \gamma^{-1} \rho \sin \theta. \end{cases} \quad (4.7)$$

Эллиптический вихрь становится каноническим оптическим вихрем при условии $\gamma = 1$ ($z_0 = 2f$, $a = w/2$):

$$(\xi - i\eta)^2 = \rho^2 \exp(-i2\theta), \quad (4.8)$$

а световое поле становится пучком ЛГ $(0, -2)$ с астигматической фазой:

$$E(\xi, \eta, z = z_0 = 2f) = i \frac{(\xi - i\eta)^2}{4\sqrt{2}w^2} \exp\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2w^2} + \frac{ik}{4f}(\xi^2 + \eta^2 + \xi\eta)\right). \quad (4.9)$$

Чтобы пучок (4.9) сохранял далее структуру оптического вихря с $\text{TZ} = -2$ надо на двойном фокусном расстоянии расположить еще одну цилиндрическую линзу, повернутую на 45 градусов к осям, с пропусканием $\exp[-ik(\xi + \eta)^2 / (8f)]$. Эта линза скомпенсирует астигматическую фазу, которая присутствует в (4.9). Причем фокусное расстояние у этой цилиндрической линзы должно быть в 2 раза больше, чем у цилиндрической линзы в (4.1).

Сразу после второй цилиндрической линзы вместо (4.9) получим:

$$E_2(\xi, \eta, z = z_0 = 2f) = i \frac{(\xi - i\eta)^2}{4\sqrt{2}w^2} \exp\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2w^2} + \frac{ik}{8f}(\xi^2 + \eta^2)\right). \quad (4.10)$$

Пучок (4.10) с точностью до константы равен моде ЛГ $(0, -2)$ на расстоянии $z = z_0$ с радиусом перетяжки $w' = w\sqrt{1 + (z/z_0)^2} = w\sqrt{2}$ и радиусом кривизны $R = z[1 + (z_0/z)^2] = 2z = 4f$. Заметим, однако, что при условии $\gamma = 1$, при котором получен пучок (4.10), две исходные линии нулей интенсивности в (4.1) проходят на расстоянии половины радиуса перетяжки от оптической оси ($a = \pm w/2$), как следует из (4.5). Но это расстояние не равно расстоянию от начала координат до корней многочлена Эрмита $H_2(\sqrt{2}x/w) = 2w^{-2}(x^2 - w^2/2)$, которое равно $a = \pm w/\sqrt{2}$.

Заметим, что оптические эллиптические гауссовы вихри с астигматической фазой рассматривались ранее в [99, 100]. В [99] рассматривалось преобразование пучка Эрмита-Гаусса порядка $(0, n)$ с помощью повернутой цилиндрической линзы. Но влияние расстояния между линиями нулевой интенсивности на формирование оптического вихря не исследовалось. В [100] рассмотрен модовый пучок, у которого канонический оптический вихрь с $\text{TZ} = n$, внедренный в эллиптический астигматический гауссов пучок, сохраняется при распространении и не расщепляется на простые оптические вихри.

4.1.2 Орбитальный угловой момент

В предыдущем подразделе мы показали, что из двух прямых линий нулей в гауссовом пучке с астигматической фазой в начальной плоскости, при распространении в свободном пространстве, формируются либо два оптических вихря первого порядка, либо один оптический вихрь второго порядка с центром на оптической оси. То есть ТЗ у такого пучка не сохраняется при распространении. В этом разделе мы получим выражение для нормированного орбитального углового момента пучка (4.1). ОУМ параксиального пучка находится по известным формулам [26]:

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) \left(x \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial E(x, y)}{\partial x} \right) dx dy, \quad (4.11)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) E(x, y) dx dy,$$

где Im – мнимая часть числа, J_z – ОУМ пучка, W – мощность пучка, \bar{E} – комплексно сопряженная функция к функции E . Так как ОУМ пучка сохраняется, рассчитаем его в начальной плоскости. Подставим функцию (4.1) в (4.11) и получим выражение для нормированного на мощность ОУМ:

$$\frac{J_z}{W} = -2\gamma w^2 \frac{3w^2 - 4a^2}{3w^4 - 8a^2 w^2 + 16a^4}. \quad (4.12)$$

Из (4.12) следует, что при малом a ($a < \sqrt{3}w/2$) ОУМ отрицательный $J_z < 0$, при больших a ($a > \sqrt{3}w/2$) ОУМ положительный $J_z > 0$, а при $a = \sqrt{3}w/2$ ОУМ равен нулю $J_z = 0$. Это неожиданный результат, так как $J_z = 0$ означает, что две вертикальные линии нулей интенсивности, разделенные определенным расстоянием, могут «обнулить» ОУМ астигматического гауссова пучка. Интересно также, что условие «обнуления» ОУМ ($a = \sqrt{3}w/2$) оптического вихря (4.1) не зависит от γ . Из этого, например, следует, что при любом γ «обнуление» ОУМ происходит тогда, когда два нуля интенсивности (два вихря минус первого порядка) лежат на вертикальной оси. В ОУМ дают вклад две составляющих: вихревая (в данном случае отрицательная) и астигматическая (в данном случае положительная). Поэтому при некоторых параметрах обе составляющие компенсируют друг друга и ОУМ становится равен нулю.

Из (4.12) также следует, что при $a = 0$ (линия нулевой интенсивности второго порядка совпадает с осью η) ОУМ равен $J_z/W = -2\gamma$ и при $\gamma = 1$ ОУМ равен $J_z/W = -2$. То есть оптический вихрь с ТЗ = -2 можно сформировать не только с помощью двух линий нулевой интенсивности и

астигматической фазы, но и с помощью одной осевой линии нулей интенсивности ($a=0$) второго порядка. Это тоже неожиданный результат, так как он не связан с многочленом Эрмита 2-го порядка, который используется в [72] для создания оптического вихря второго порядка. Отличие в том, что у оптического вихря с $a=0$ на двойном фокусном расстоянии сформируются два оптических вихря минус первого порядка, лежащих на горизонтальной оси ξ . Это следует из (4.4). При стремлении a к бесконечности из (4.12) следует, что ОУМ будет равен нулю. Итак, при $a=0$ ОУМ отрицательный, при $a=\sqrt{3}w/2$ он равен нулю, а при бесконечно большом a ОУМ опять равен нулю. То есть, при некотором a ОУМ должен иметь положительный максимум. Действительно, поиск экстремумов ОУМ (4.12) показывает, что минимальное отрицательное и максимальное положительное значение ОУМ достигается при $a=(w/2)(3-\sqrt{6})^{1/2} \approx 0,37w < w$ и при $a=(w/2)(3+\sqrt{6})^{1/2} \approx 1,17w > w$. Сами экстремальные значения ОУМ при этом равны $J_{z,\min}/W = -(\gamma\sqrt{6}/2)(3-\sqrt{6})^{-1} \approx -2,22\gamma$ и $J_{z,\max}/W = (\gamma\sqrt{6}/2)(3+\sqrt{6})^{-1} \approx 0,22\gamma$. В ОУМ дают вклад вихревая и астигматическая составляющие [100], сумма которых и определяет полный ОУМ пучка. При условии (4.5) на двойном фокусном расстоянии формируется один ноль интенсивности второго порядка на оптической оси, тогда вместо (4.12) получим:

$$\frac{J_z}{W} = -2\gamma \frac{3\gamma^4 + 4\gamma^2 + 1}{3\gamma^4 + 2\gamma^2 + 3}. \quad (4.13)$$

И при условии, что $\gamma=1$, из (4.13) получим $J_z/W = -2$. Таким образом, при условии (4.5) (то есть $a=w/2$) и при $\gamma=1$ на двойном фокусном расстоянии формируется один ноль интенсивности второго порядка с ТЗ $= -2$, и ОУМ у светового поля (4.2) при этом будет также равен -2 .

Интересно заметить, что выражение (4.13) похоже на выражение для ОУМ

$$\frac{J_z}{W} = 8\alpha \frac{(\alpha^2 + 1)}{(3\alpha^4 + 2\alpha^2 + 3)} \quad (4.14)$$

эллиптического гауссова вихря с амплитудой в начальной плоскости

$$E_2(x, y, z=0) = \frac{(\alpha x + iy)^2}{w^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right), \quad (4.15)$$

который рассматривался в [102]. Отличие в том, что у эллиптического гауссова вихря (4.15) нет астигматической фазы, которая есть у пучка (4.1) или (4.2). Поэтому при любой степени эллиптичности (при любом α) ОУМ (4.14) будет меньше (точнее не больше) ТЗ пучка (4.15), который равен 2.

А пучок (4.2), при разном γ , от величины которого зависит эллиптичность оптического вихря, может иметь ОУМ как больше -2 , так и меньше -2 .

4.1.3 Две несимметричные параллельные линии нулей интенсивности

В этом разделе рассмотрим к каким изменениям приведет то, что вертикальные линии нулей интенсивности в начальной плоскости будут расположены несимметрично относительно центра. Рассмотрим начальное световое поле с амплитудой вида:

$$E(x, y, z = 0) = \frac{(x-a)(x-b)}{w^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2} - \frac{ik}{4f}(x+y)^2\right). \quad (4.16)$$

Поле (4.16) отличается от поля (4.1) только расположением линий нулей интенсивности. На двойном фокусном расстоянии поле (4.16) примет вид:

$$E(\xi, \eta, z = 2f) = \frac{-i\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \exp\left\{-\frac{\gamma^2(\xi^2+\eta^2)}{w^2(1+\gamma^2)} + \frac{i\gamma}{w^2}(\xi^2+\eta^2) + \frac{2i\gamma^3\xi\eta}{w^2(1+\gamma^2)}\right\} \times \left[\frac{1}{2(1+\gamma^2)} + \frac{ab}{w^2} - \frac{\gamma^2(\xi-i\gamma\eta)^2}{w^2(1+\gamma^2)^2} + \frac{i\gamma(a+b)(\xi-i\gamma\eta)}{w^2(1+\gamma^2)}\right]. \quad (4.17)$$

Амплитуда (4.17) совпадает с (4.1) при $a = -b$. Если $a \neq -b$, то в этом случае формируется гауссов пучок с астигматической фазой (4.17), но он умножается на другую функцию, отличную от (4.3):

$$F(\xi, \eta) = A - B\xi^2 + C\eta^2 + iD\xi\eta + iE\xi + F\eta, \quad (4.18)$$

где

$$A = \frac{1}{2(1+\gamma^2)} + \frac{ab}{w^2}, \quad B = \frac{\gamma^2}{w^2(1+\gamma^2)^2}, \\ C = \frac{\gamma^4}{w^2(1+\gamma^2)^2}, \quad D = \frac{2\gamma^3}{w^2(1+\gamma^2)^2}, \quad (4.19) \\ E = \frac{\gamma(a+b)}{w^2(1+\gamma^2)}, \quad F = \frac{\gamma^2(a+b)}{w^2(1+\gamma^2)}.$$

Из (4.18) следует, что для того, чтобы в плоскости $z = 2f$ были изолированные нули интенсивности поля (4.17), нужно, чтобы мнимая часть функции $F(\xi, \eta)$ была равна нулю. Это может быть на двух прямых, при $\xi = 0$ и при $\eta = -(a+b)(1+\gamma^2)/(2\gamma^2)$. Это значит, что при $A \neq 0$ в центре ($\xi = \eta = 0$) не может быть нуля интенсивности второго порядка. При

$A = 0$, то есть когда линии нулевой интенсивности в начальной плоскости расположены по разную сторону от центра и произведение расстояний от этих линий до центра будет равно:

$$ab = \frac{-w^2}{2(1+\gamma^2)}, \quad (4.20)$$

в центре плоскости $z = 2f$ будет ноль интенсивности, но не минус второго, а минус первого порядка. А координаты второго нуля интенсивности будут такими: $\xi = 0$, $\eta = -(a+b)(1+\gamma^2)/(2\gamma^2)$.

Орбитальный угловой момент для пучка (4.16) можно определить из выражения:

$$\frac{J_z}{W} = -2\gamma \frac{3w^4 + 2(a^2 + 4ab + b^2)w^2}{3w^4 + 4(a^2 + 4ab + b^2)w^2 + 16(ab)^2}. \quad (4.21)$$

При $a = -b$ выражение для ОУМ (4.21) совпадает с (4.12). Из (4.21) следует, что если $ab > 0$, то ОУМ всегда будет отрицательный, и не будет менять знак, и никогда не будет равен нулю, как ОУМ (4.12) для поля (4.1).

4.1.4 Астигматический пучок \cos -Гаусса

Известен пучок, который называется пучок косинуса-Гаусса [103]. Впервые он был реализован как плазмонный пучок, распространяющийся по поверхности раздела сред. В этом разделе мы рассмотрим другой пример пучка косинуса-Гаусса с ОУМ, который получается из гауссова пучка, промодулированного функцией косинуса, с помощью астигматического преобразования, выполненного цилиндрической линзой, повернутой на угол 45 градусов.

Комплексная амплитуда такого поля в начальной плоскости имеет вид:

$$E(x, y, z = 0) = \cos(\alpha x) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2} - \frac{ik}{4f}(x+y)^2\right). \quad (4.22)$$

Световое поле (4.22) интересно тем, что в нем имеется бесконечное число параллельных оси y линий нулевой интенсивности, разделенных расстоянием π/α . Во что преобразуются эти линии нулевой интенсивности ($\cos \alpha x = 0$) на двойном фокусном расстоянии? На двойном фокусном расстоянии от начальной плоскости ($z = 2f$) амплитуда поля (4.22) будет иметь вид:

$$E(\xi, \eta, z = 2f) = \frac{-i\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \cosh \left[\frac{\alpha\gamma}{1+\gamma^2} (\xi - i\gamma\eta) \right] \times \exp \left[-\frac{\alpha^2 w^2}{4(1+\gamma^2)} - \frac{\gamma^2 (\xi^2 + \eta^2)}{w^2(1+\gamma^2)} + \frac{ik}{4f} \left(\xi^2 + \eta^2 + \frac{2\gamma^2 \xi \eta}{1+\gamma^2} \right) \right]. \quad (4.23)$$

В (4.23) эллиптический оптический вихрь $\xi - i\gamma\eta$ находится под знаком гиперболического косинуса. При $\xi = 0$ гиперболический косинус становится обычным косинусом, и для нулей интенсивности (оптических вихрей) получаем уравнение (других нулей у гиперболического косинуса нет):

$$\cos \left(\frac{\alpha\gamma^2 \eta}{1+\gamma^2} \right) = 0. \quad (4.24)$$

Из (4.24) следует, что вертикальные линии нулей интенсивности в начальной плоскости, преобразовались в бесконечный набор эквидистантных оптических вихрей с периодом $T = (\pi/\alpha)(1+1/\gamma^2)$ и ТЗ равным -1 , лежащих на вертикальной оси η в плоскости на расстоянии $z = 2f$. Поэтому ТЗ поля (4.23) будет бесконечным. При больших расстояниях между линиями нулей интенсивности, когда $\alpha \ll 1$, косинус в (4.22) можно заменить его приближенным значением $\cos(\alpha x) \approx 1 - \alpha^2 x^2/2$. И поле (4.22) будет вести себя аналогично световому полю (4.1). То есть такое поле сформирует в выходной плоскости два нуля на вертикальной оси на большом расстоянии от центра: $\eta = \pm \pi(1+\gamma^2)(2\gamma^2)^{-1}$.

Далее найдем ОУМ пучка (4.22). Подставив (4.22) в (4.11) получим:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\gamma p^2}{1 + \exp(p^2)}, \quad (4.25)$$

где $p = \alpha w / \sqrt{2}$. Из (4.25) видно, что при малом периоде косинуса ($p \ll 1$) и при большом периоде ($p \gg 1$) ОУМ пучка (4.22) и (4.23) будет стремиться к нулю, а в интервале значений $1 < p < 1,2$ находится максимум ОУМ (4.25), примерно равный $\gamma/2$.

4.1.5 Моделирование

На рис. 4.1 показаны распределения интенсивности и фазы в начальной плоскости и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы гауссова пучка с двумя симметричными линиями нулевой интенсивности (уравнения (4.1), (4.2)) с разными расстояниями между этими линиями. Распределения в начальной плоскости были получены по формуле (4.1), а на двойном фокусном расстоянии – с помощью преобразования Френеля и по формуле (4.2) (рисунки получались визуально

неразличимые). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w = 0,5$ мм, фокусное расстояние цилиндрической линзы $f = 1$ м, расчётная область во входной плоскости $|x|, |y| \leq 1,5$ мм, расчётная область в выходной плоскости $|\xi|, |\eta| \leq 3$ мм, расстояние между линиями нулевой интенсивности $a = 0$ (одна линия второго порядка) (первый ряд), $a = 0,8a_0$ (второй ряд), $a = a_0$ (третий ряд), $a = 1,2a_0$ (четвёртый ряд), где $a_0 = w/[2(1 + \gamma^2)]^{1/2}$ – расстояние, при котором должен формироваться осевой вихрь -2-го порядка (уравнение (4.5)).

Рис. 4.1 подтверждает теоретические предсказания. Действительно, из рис. 4.1 видно, что при $a = 0$ (центральная линия нулевой интенсивности второго порядка) оптические вихри (изолированные нули интенсивности) минус первого порядка в выходной плоскости расположены на горизонтальной оси и максимально отдалены друг от друга (первый ряд на рис. 4.1). При увеличении расстояния a между линиями нулевой интенсивности в начальной плоскости оптические вихри в выходной плоскости приближаются друг к другу (второй ряд на рис. 4.1). При достижении расстоянием a величины (4.5) оба вихря в выходной плоскости сливаются в один эллиптический вихрь минус второго порядка (третий ряд на рис. 4.1). При дальнейшем увеличении расстояния a вихрь в выходной плоскости снова разделяется на два вихря минус первого порядка, но уже расположенные на вертикальной оси.

На рис. 4.2 показаны распределения интенсивности и фазы в начальной плоскости и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы гауссова пучка с двумя симметричными линиями нулевой интенсивности (уравнения (4.1), (4.2)) с разными значениями нормированного ОУМ. Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w = 0,5$ мм, фокусное расстояние цилиндрической линзы $f = z_0/2 \approx 73,8$ см (то есть $\gamma = 1$), расчётная область во входной плоскости $|x|, |y| \leq 1,5$ мм, расчётная область в выходной плоскости $|\xi|, |\eta| \leq 3$ мм, расстояние между линиями нулевой интенсивности $a = 0$ (ОУМ равен -2) (первый ряд), $a = (w/2)(3 - \sqrt{6})^{1/2} \cong 185$ мкм (ОУМ минимален и равен примерно $-2,22$) (второй ряд), $a = \sqrt{3}w/2 \cong 433$ мкм (ОУМ равен нулю) (третий ряд), $a = (w/2)(3 + \sqrt{6})^{1/2} \cong 584$ мкм (ОУМ максимален и равен примерно $0,22$) (четвёртый ряд), $a = 2w \approx 1$ мм (ОУМ спадает от максимума и равен примерно $0,11$) (пятый ряд).

Пунктирные эллипсы и стрелки (рис. 4.2б, е) показывают расположения световых пятен в начальной плоскости и направления градиента фазы в этих пятнах.

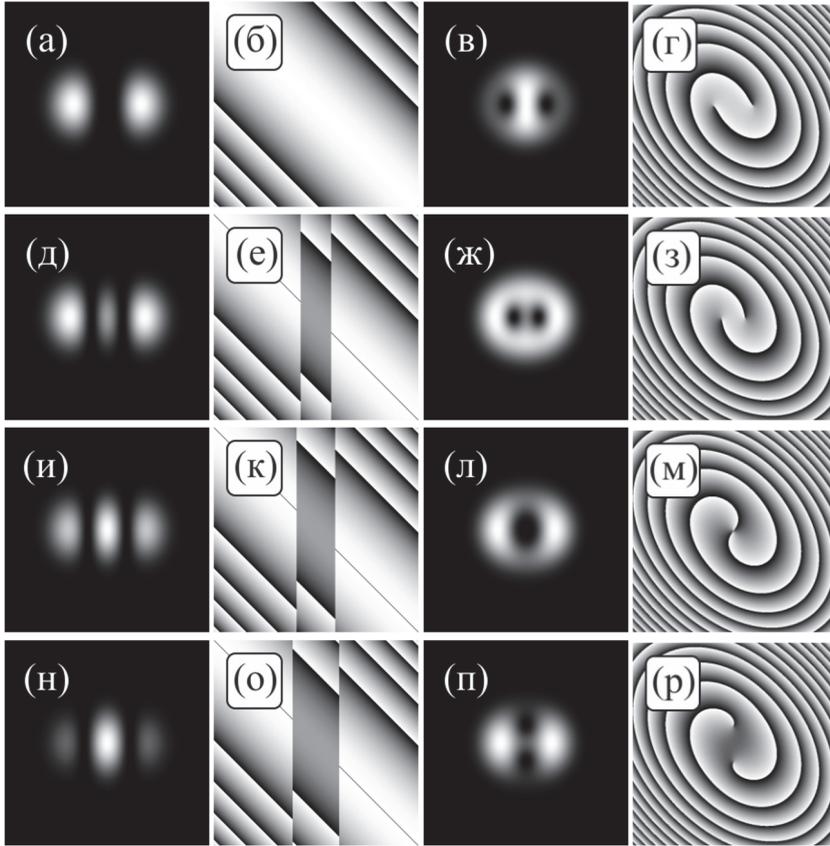


Рис. 4.1. Распределения интенсивности (первый и третий столбцы) и фазы (второй и четвёртый столбцы) в начальной плоскости (первые два столбца) и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы (третьи и четвёртый столбцы) гауссова пучка с двумя симметричными линиями нулевой интенсивности (уравнения (4.1) и (4.2)) с разными расстояниями между этими линиями

На всех рис. 4.2 нормированный ОУМ, рассчитанный численно по формуле (4.11), совпал с теоретическим значением, рассчитанным по формуле (4.12). Так, в первом ряду на рис. 4.2 теоретическое и численные значения нормированного ОУМ равны -2 и $-1,998$, соответственно. Для второго ряда эти значения равны $-2,225$ и $-2,223$, для третьего ряда 0 и 5×10^{-4} , для четвёртого ряда $0,2247$ и $0,2248$, для пятого ряда $0,11454$ и $0,11451$.

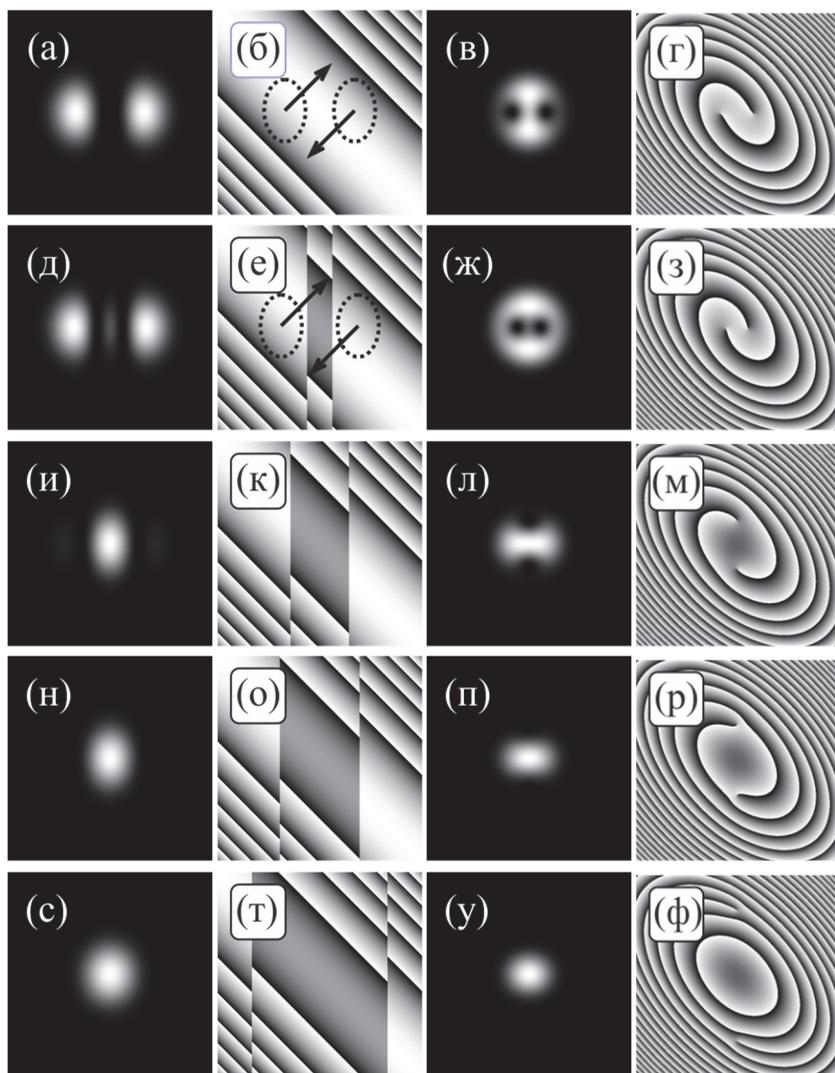


Рис. 4.2. Распределения интенсивности (первый и третий столбцы) и фазы (второй и четвёртый столбцы) в начальной плоскости (первые два столбца) и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы (третий и четвёртый столбцы) гауссова пучка с двумя симметричными линиями нулевой интенсивности (уравнения (4.1) и (4.2)) с разными значениями нормированного ОУМ

Согласно (4.1), во входной плоскости может быть до трёх максимумов интенсивности: один центральный (если $a \neq 0$) при $x=y=0$ (его интенсивность равна $(a/w)^4$) и два боковых при $x=\pm(a^2+w^2)^{1/2}$ и $y=0$ (их

интенсивность равна $\exp[-2(1+a^2/w^2)]$). Получается, что с ростом расстояния a между линиями нулевой интенсивности сначала появляется слабый максимум в центре, но затем его интенсивность возрастает, а интенсивность боковых максимумов экспоненциально убывает. Рис. 4.1 и 4.2 это подтверждают. При $a=0$ (первый ряд на рис. 4.2) поле во входной плоскости состоит из двух световых пятен, при $a=(w/2)(3-\sqrt{6})^{1/2}$ (второй ряд на рис. 4.2) появляется слабое третье пятно в центре. При дальнейшем возрастании a центральное пятно становится ярче боковых и последние уже не видны (третий-пятый ряды на рис. 4.2). Именно это объясняет стремление ОУМ к нулю (пятый ряд на рис. 4.2) после прохождения максимального значения (четвёртый ряд на рис. 4.2). Механический момент равен произведению силы на плечо, а основная интенсивность сосредоточена в центре, и потому плечо близко к нулю. Спад ОУМ от начального значения -2 (когда $a=0$) до минимального значения $-2,22$ (когда $a=(w/2)(3-\sqrt{6})^{1/2}$) также объясним. С ростом a интенсивность боковых максимумов спадает, но расстояние до них от центра возрастает. До некоторого значения a рост плеча перевешивает спад интенсивности боковых пятен и потому ОУМ по модулю возрастает. Существенные (около -2) значения ОУМ (первый и второй ряд на рис. 4.2) объясняются наличием градиента фазы в начальной плоскости в областях высокой интенсивности. Если бы в этих областях оказались микрочастицы, этот градиент фазы стремился бы повернуть их вокруг центра картины по часовой стрелке (рис. 4.2б, е).

На рис. 4.3 показаны распределения интенсивности и фазы в начальной плоскости и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы гауссова пучка с двумя несимметричными линиями нулевой интенсивности (уравнения (4.16), (4.17)). Параметры расчёта: длина волны $\lambda=532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w=0,5$ мм, фокусное расстояние цилиндрической линзы $f=z_0/2 \approx 73,8$ см (то есть $\gamma=1$), расчётная область во входной плоскости $|x|, |y| \leq 1,5$ мм, расчётная область в выходной плоскости $|\xi|, |\eta| \leq 3$ мм, координаты линий нулевой интенсивности $a=w$ и $b=-w/4$.

Из рис. 4.3 видно, что асимметричное расположение линий нулевой интенсивности приводит в начальной плоскости к двум световым пятнам разного размера и интенсивности, что приводит к асимметричной картине и в выходной плоскости. Для выбранных параметров положения линий нулевой интенсивности удовлетворяют условию (4.20) и потому в центре

выходной плоскости формируется ноль интенсивности минус первого порядка, а второй ноль расположен в точке ($\xi=0, \eta=-1,5w \approx -750$ мкм), что подтверждается на рис. 4.3(з). Нормированный ОУМ на рис. 4.3, рассчитанный численно по формуле (4.11), совпал с теоретическим значением, рассчитанным по формуле (4.21) (-1,469 и -1,471).

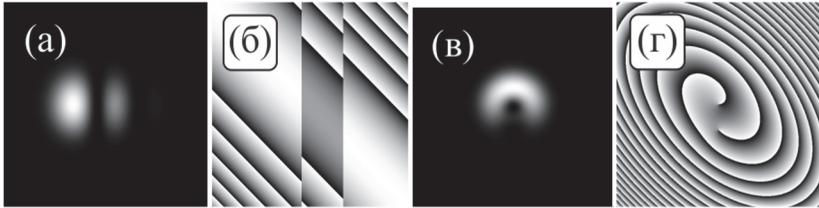


Рис. 4.3. Распределения интенсивности (а, в) и фазы (б, г) в начальной плоскости (а, б) и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы (в, г) гауссова пучка с двумя несимметричными линиями нулевой интенсивности (уравнения (4.16), (4.17))

На рис. 4.4 показаны распределения интенсивности и фазы в начальной плоскости и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы косинусного гауссова пучка (уравнения (4.22), (4.23)). Параметры расчёта: длина волны $\lambda=532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w=0,5$ мм, фокусное расстояние цилиндрической линзы $f=z_0/2 \approx 73,8$ см (то есть $\gamma=1$), период косинусной составляющей равен радиусу перетяжки (то есть $\alpha=2\pi/w$), расчётная область во входной плоскости $|x|, |y| \leq 1,5$ мм, расчётная область в выходной плоскости $|\xi|, |\eta| \leq 3$ мм.

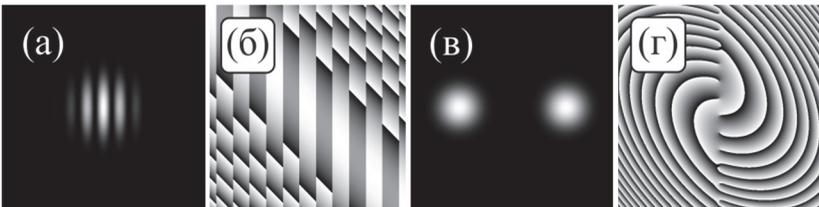


Рис. 4.4. Распределения интенсивности (а, в) и фазы (б, г) в начальной плоскости (а, б) и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы косинусного гауссова пучка (уравнения (4.22), (4.23))

Из рис. 4.4 видно, что в выходной плоскости на вертикальной оси действительно сформировался набор эквидистантных оптических вихрей минус первого порядка с периодом $T=(\pi/\alpha)(1+1/\gamma^2)=w=0,5$ мм (на рис. 4.4г их 12 штук). Расположение нулей интенсивности и расстояние между ними на рис. 4.4в согласуется с уравнением (4.23). Но теоретически, таких оптических вихрей должно быть бесконечное число, и поэтому ТЗ должен быть бесконечно большой. При данных параметрах

пучок имеет малый ОУМ (численные и теоретические значения равны $0,004$ и 5×10^{-8}).

В данном разделе теоретически и численно показано как гауссов пучок с конечным числом параллельных линий нулей интенсивности (краевых дислокаций) с помощью цилиндрической линзы преобразуется в вихревой пучок, имеющий орбитальный угловой момент и топологический заряд. На примере двух параллельных линий нулей интенсивности, симметрично расположенных относительно центра, показана динамика формирования двух нулей интенсивности на двойном фокусном расстоянии: при увеличении расстояния между вертикальными линиями нулей интенсивности два оптических вихря формируются сначала на горизонтальной оси, потом сходятся в центр, а затем расходятся, но уже по вертикальной оси. Топологический заряд такого оптического вихря при любом расстоянии между линиями нулей равен -2 . Причем на любом расстоянии по оптической оси, кроме начальной плоскости. При изменении расстояния между линиями нулей интенсивности меняется ОУМ пучка. Он может быть отрицательным, положительным и при определенном расстоянии между линиями нулей интенсивности ОУМ может быть равен нулю.

Также в этом разделе на конкретном примере показано, что ОУМ и ТЗ это разные характеристики светового поля. Например, у \cos -Гауссова пучка с астигматизмом ТЗ равен бесконечности, так как после цилиндрической линзы у такого пучка имеются бесконечное число оптических вихрей с ТЗ -1 , эквидистантно расположенных на прямой. Но все эти вихри (нули интенсивности) находятся в области, где интенсивность почти нулевая, и поэтому ОУМ такого пучка тоже почти нулевой.

4.2 Астигматическое преобразование одной краевой дислокации высокого порядка

Астигматические преобразования лазерных пучков в оптике хорошо известны. Первой работой по астигматическому конвертору была работа Абрамочкина и Волостникова [72], в которой показано, как с помощью астигматического конвертора безвихревой пучок Эрмита-Гаусса (ЭГ) преобразуется в вихревой пучок Лагерра-Гаусса (ЛГ). В этой работе пучок Эрмита-Гаусса (n, m) преобразуется в моду Лагерра-Гаусса $(n, m - n)$, если $m > n$, с помощью двух цилиндрических линз. Позже во многих работах изучалось преобразование различных лазерных пучков с помощью астигматических преобразований. Так в [104, 105] изучалось прохождение пучка Эрмита-Гаусса через 4×4 оптическую систему, в том числе с астигматизмом. В [106] рассмотрено про-

хождение пучков Эрмита-Лагерра-Гаусса через астигматический модовый конвертор. В [107, 108] исследовалась фокусировка астигматической линзой оптического вихря высокого порядка. Преобразования астигматического \sin -Гауссова пучка в нелинейной среде рассматриваются в [109]. В [110, 111] исследуется астигматическое модовое преобразование внутри лазерного резонатора. Оптические эллиптические гауссовы вихри с астигматической фазой рассматривались в [99, 100]. В [99] рассматривалось преобразование пучка Эрмита-Гаусса порядка $(0, n)$ с помощью повернутой цилиндрической линзы. В [100] рассмотрен модовый пучок, у которого канонический оптический вихрь с ТЗ равным n , внедренный в эллиптический астигматический гауссов пучок, сохраняется при распространении и не расщепляется на простые оптические вихри. В [102] рассмотрено распространение эллиптических оптических вихрей. Измерять топологический заряд оптического вихря с помощью астигматического преобразования предложено в [24]. В [42] рассмотрен астигматический вихревой пучок Эрмита-Гаусса.

С другой стороны, известны также работы, в которых исследуются поведение винтовых [81] и краевых дислокаций в оптических системах. Так в [112] изучалась эволюция при распространении смеси краевой (осевой) и винтовой дислокаций. В этой работе показано, что комбинированный оптический вихрь имеет дробный топологический заряд. В [95, 96, 97, 98] исследуется взаимодействие оптического вихря (винтовой дислокации) и краевой поперечной дислокации (линии нулевой интенсивности), внедренных в гауссов пучок. В этих работах показано, что это взаимодействие приводит к расщеплению краевой дислокации и формированию дополнительных оптических вихрей.

Из рассмотренного краткого обзора работ следует, что астигматического преобразования краевой дислокации не рассматривалось. В данном разделе мы теоретически и численно показали, что вертикальная краевая дислокация n -го порядка, внедренная в перетяжку гауссова пучка, после цилиндрической линзы, расположенной в перетяжке и повернутой на 45 градусов к осям, «распадется» на n изолированных нулей интенсивности (винтовых дислокаций), вокруг которых сформируются n эллиптических оптических вихрей с топологическим зарядом -1 , лежащих на прямой, перпендикулярной краевой дислокации, и расположенных в точках, координаты которых являются корнями многочлена Эрмита n -го порядка.

4.2.1 Комплексная амплитуда поля с краевой дислокацией на двойном фокусном расстоянии

Рассмотрим краевую дислокацию, внедренную в перетяжку гауссова пучка с астигматической фазой. То есть в плоскости перетяжки гауссова пучка с краевой дислокацией n -го порядка, которая проходит через центр и совпадает с вертикальной осью, расположена идеальная тонкая цилиндрическая линза, образующая которой повернута в плоскости перетяжки на 45 градусов к осям координат. Комплексная амплитуда такого светового поля в начальной плоскости имеет вид:

$$E(x, y, z = 0) = \frac{x^n}{w^n} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2} - \frac{ik}{4f}(x + y)^2\right), \quad (4.26)$$

где k – волновое число света, w – радиус перетяжки гауссова пучка, (x, y) – поперечные декартовы координаты и z – продольная координата вдоль оптической оси, f – фокусное расстояние цилиндрической линзы. Второе слагаемое в показателе экспоненты в (4.26) описывает распределение фазы цилиндрической линзы с параболическим профилем, расположенной под углом 45 градусов к осям x и y .

Наша цель – показать, что на горизонтальной оси x на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы сформируется n оптических вихрей с ТЗ -1.

Амплитуда светового поля (4.26) на расстоянии $z = 2f$, полученная с помощью преобразования Френеля, будет иметь вид:

$$E(\xi, \eta, z = 2f) = \left(\frac{(-i)^{n+1} \gamma}{2^n (1 + \gamma^2)^{(n+1)/2}} \right) \times \exp\left(-\frac{\gamma^2 (\xi^2 + \eta^2)}{w^2 (1 + \gamma^2)} + \frac{i\gamma}{w^2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{2i\gamma^3 \xi \eta}{w^2 (1 + \gamma^2)} \right) H_n \left[-\frac{\gamma (\xi - i\gamma \eta)}{w \sqrt{1 + \gamma^2}} \right], \quad (4.27)$$

где $\gamma = z_0/(2f)$, $z_0 = kw^2/2$. В (4.27) z_0 – длина Рэлея, $H_n(x)$ – многочлен Эрмита. Из (4.27) следует, что у гауссова пучка на двойном фокусном расстоянии изменился радиус перетяжки $w(z = 2f) = \bar{w} = w\gamma^{-1} \sqrt{1 + \gamma^2}$ и появилась астигматическая фаза. Из (4.27) также следует, что при $\eta = 0$ аргумент многочлена Эрмита становится действительной величиной. Приравнявая этот аргумент значениям корней многочлена $H_n(\sigma_n) = 0$ получим координаты центров эллиптических оптических вихрей (винтовых дислокаций), лежащих на горизонтальной оси ξ :

$$\xi_n = -w \sqrt{1 + \gamma^2} (\gamma)^{-1} \sigma_n \quad (4.28)$$

Из общей формулы (4.28) следуют частные случаи. Пусть краевая дислокация имеет второй порядок и совпадает с осью η , тогда в выходной плоскости будет только два нуля на горизонтальной оси на расстоянии от центра, равном $\xi_{1,2} = \pm w(1 + \gamma^2)^{1/2} (\sqrt{2}\gamma)^{-1}$. Это следует из того, что у многочлена Эрмита 2-го порядка всего два корня $\sigma_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2}$. Краевая дислокация 3-го порядка даст на выходе 3 оптических вихря: один на оптической оси, а два других в точках с координатами: $\xi_{1,2} = \pm w(1 + \gamma^2)^{1/2} (\gamma\sqrt{2/3})^{-1}$. Так как у многочлена Эрмита 3-го порядка три корня: $\sigma_0 = 0$, $\sigma_{1,2} = \pm\sqrt{3/2}$. И так далее.

Рассмотрим далее, какие оптические вихри формируются на двойном фокусном расстоянии для начального пучка (4.25). Из (4.26) следует, что вокруг корней многочлена Эрмита на горизонтальной оси сформируются эллиптические вихри с топологическими зарядами -1 и с эллиптической амплитудой вблизи нуля интенсивности:

$$\xi - i\gamma\eta = \rho \exp(-i\theta). \quad (4.29)$$

Правая часть в (4.29) получена в полярных эллиптических координатах:

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos \theta, \\ \eta = \gamma^{-1} \rho \sin \theta. \end{cases} \quad (4.30)$$

Эллиптический вихрь становится каноническим оптическим вихрем при условии $\gamma = 1$ ($z_0 = 2f$):

$$\xi - i\eta = \rho \exp(-i\theta), \quad (4.31)$$

а амплитуда светового поля (4.27) будет иметь вид ($\gamma = 1$):

$$E(\xi, \eta, z = z_0 = 2f) = \left(\frac{i^{n-1}}{2^{(3n+1)/2}} \right) \exp \left(-\frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2w^2} + \frac{ik}{4f} (\xi^2 + \eta^2 + \xi\eta) \right) \times H_n \left[\frac{(\xi - i\eta)}{w\sqrt{2}} \right]. \quad (4.32)$$

Чтобы пучок (4.32) сохранял далее свою структуру (то есть стал модовым пучком) при дальнейшем распространении, надо на двойном фокусном расстоянии расположить еще одну цилиндрическую линзу, повернутую на 45 градусов к осям, с пропусканием $\exp[-ik(\xi + \eta)^2/(8f)]$. Эта линза скомпенсирует астигматическую фазу, которая присутствует

в (4.32). Причем фокусное расстояние у этой цилиндрической линзы должно быть в 2 раза больше, чем у цилиндрической линзы в (4.26). Сразу после второй цилиндрической линзы вместо (4.32) получим:

$$E(\xi, \eta, z = z_0 = 2f) = \left(\frac{i^{n-1}}{2^{(3n+1)/2}} \right) \exp \left(-\frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2w^2} + \frac{ik}{8f} (\xi^2 + \eta^2) \right) \times H_n \left[\frac{(\xi - i\eta)}{w\sqrt{2}} \right]. \quad (4.33)$$

Пучок (4.33) является частным примером семейства структурно-стабильных пучков [106], которые распространяются, изменяя только масштаб и вращаясь. Пучок (4.33) с точность до обозначений совпадает с вихревым пучком Эрмита, рассмотренным в [42]. Из теории структурно-стабильных гауссовых лазерных пучков [106] следует, что пучок с начальной амплитудой вида

$$E(\xi, \eta, z = 0) = H_n \left[\alpha (\xi \pm i\eta) \right] \exp(-\beta(\xi^2 + \eta^2)), \quad (4.34)$$

где α и β – комплексные постоянные и $\text{Re } \beta > 0$, будет при распространении сохранять свою структуру, а изменяться только масштабно и вращаясь. Это общее доказательство того, что пучок (4.33) тоже будет сохранять структуру при распространении.

Ниже мы приведем выражение для нормированного орбитального углового момента пучка (4.26). ОУМ параксиального пучка находится по известным формулам [26]:

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) \left(x \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial E(x, y)}{\partial x} \right) dx dy, \quad (4.35)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) E(x, y) dx dy,$$

где Im – мнимая часть числа, J_z – ОУМ пучка, W – мощность пучка, \bar{E} – комплексно сопряженная функция к функции E . Так как ОУМ пучка сохраняется, рассчитаем его в начальной плоскости. Подставим функцию (4.26) в (4.35) и получим простое выражение для нормированного на мощность ОУМ:

$$J_z / W = -\gamma n. \quad (4.36)$$

При $\gamma = 1$, ОУМ поля (4.36) совпадает с его ТЗ и равен $J_z/W = -n$. Таким образом, вихревой пучок с ТЗ и ОУМ, равным $-n$ можно сформировать с помощью краевой дислокации n -го порядка и двух цилиндрических линз.

4.2.2 Моделирование

На рис. 4.5 показаны распределения интенсивности и фазы в начальной плоскости, и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы гауссова пучка с линией нулевой интенсивности n -порядка (уравнения (4.26), (4.27)).

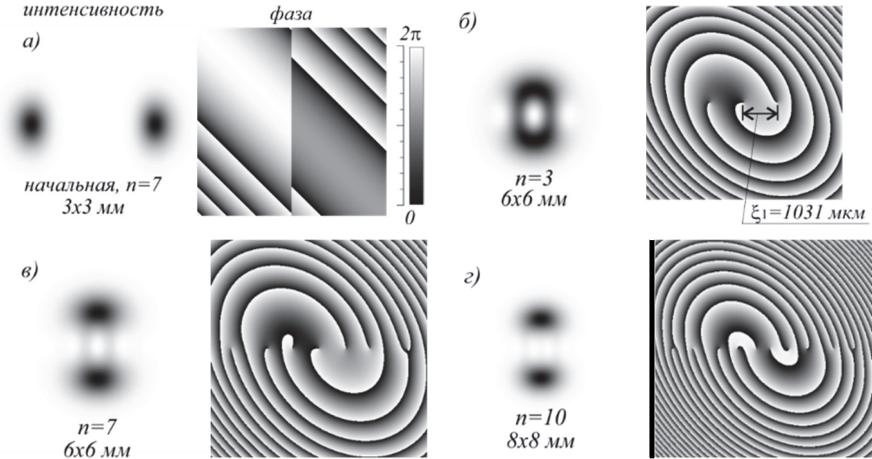


Рис. 4.5. Распределения интенсивности (негатив) и фазы в начальной плоскости гауссова пучка с краевой дислокацией при $n = 7$ (а) и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы при порядке $n = 3$ (б), $n = 7$ (в), $n = 10$ (г)

Распределения в начальной плоскости были получены по формуле (4.26), а на двойном фокусном расстоянии – по формуле (4.27). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w = 0,5$ мм, фокусное расстояние цилиндрической линзы $f = 1$ м, расчётная область во входной плоскости $|x|, |y| \leq 1,5$ мм, расчётная область в выходной плоскости $|\xi|, |\eta| \leq 3$ мм для $n = 3$ и 7, и $|\xi|, |\eta| \leq 4$ мм для $n = 10$.

Из рис. 4.5 следует, что, действительно, вертикально расположенная краевая дислокация порядка $n = 3, 7, 10$, на которой происходит «сбой» фазы, преобразуется на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы в эллиптические оптические вихри (изолированные нули интенсивности) минус первого порядка, расположенные на горизонтальной оси, разделенные расстоянием (4.28), и их число соответственно равно $n = 3, 7, 10$. Для $n = 3$ координаты дислокаций ξ можно так же определить по формуле $\xi_{1,2} = \pm w(1 + \gamma^2)^{1/2} (\gamma\sqrt{2/3})^{-1}$, результат которой совпадает с их нахождением на рис. 4.5б: $\xi_{1,2} = \pm 1031$ мкм.

В этом разделе теоретически показано, что астигматическое преобразование краевой дислокации (прямой линии нулевой интенсивности) n -го порядка формирует на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы n оптических эллиптических вихрей (винтовых дислокаций) с топологическим зарядом -1 , расположенных на прямой линии, перпендикулярной краевой дислокации, в точках, координаты которых являются корнями многочлена Эрмита n -го порядка. Орбитальный угловой момент краевой дислокации с астигматической фазой пропорционален n .

Глава 5. Оптические вихри с бесконечным топологическим зарядом

5.1 Оптические пучки с бесконечным числом вихрей

В 1992 Л. Аллен [1] показал, что световые поля с винтовым волновым фронтом (оптические вихри) обладают орбитальным угловым моментом. Такие поля характеризуются также и другой величиной – топологическим зарядом. В оптической передаче информации данные могут быть закодированы различными ОУМ-состояниями, возможное число которых теоретически не ограничено. На практике, однако, сформировать вихревые пучки с большим ТЗ не просто. Это побудило исследователей изучать световые поля с большими значениями ТЗ и ОУМ, а также методы их формирования, обнаружения, преобразования. В 1997 году было показано, что достигнуть большое значение ОУМ можно даже без оптических вихрей: достаточно пропустить гауссов пучок через цилиндрическую линзу [100]. Позже, в 2012 году оптические вихри высокого порядка были сформированы спиральными фазовыми зеркалами [113]. В этой работе были получены высококачественные оптические вихри с ТЗ от 1 до 100 при длине волны 532 нм. В 2015 году оптические вихри были сформированы с помощью цифровых микрзеркал [114]. Применяя бинарные голограммы Ли или бинарное суперпиксельное кодирование, были сформированы оптические вихри до 90-го порядка. В работе [115] использовалась перекрёстная фаза для экспериментального формирования пучков Лагерра-Гаусса и измерения их ТЗ вплоть до 200. В [116] формировались цилиндрические векторные пучки с ТЗ до 14, но в компактном твердотельном лазере (Yb:YAG microchip laser). Из работ, посвящённых измерению больших значений ТЗ, можно упомянуть [24, 117, 118]. В [24] вихревой пучок расщеплялся цилиндрической линзой в массив световых пятен, что позволило измерить ТЗ до 100. В [117] ТЗ вплоть до 130 измерялся за счёт самоинтерференции пучка в интерферометре Маха-Цендера. В [118] описан метод определения ТЗ с помощью решётки со спиральными спицами с переменным периодом. Продемонстрировано определение ТЗ до 160. В [119] разработан метод для улучшения чистоты мод (подавления нежелательных радиальных мод) вихревых пучков. Были получены высокочистые ОУМ-моды до 100-го порядка. В [120] разработано полое кварцевое фотонно-кристаллическое волокно с кольцевым сердечником, способное переносить 101 ОУМ-моду с сохранением чистоты мод, низкими потерями, и большим различием эффективных

показателей преломления между соседними модами. Наконец, в [121] с помощью спирального фазового зеркала формировались фотоны с ОУМ больше 10000.

Таким образом, возникает вопрос: насколько больших значений может достигать ТЗ хотя бы теоретически? Может ли он быть бесконечным? Для световых пучков с оптическими вихрями, но без круговой симметрии, величины ТЗ и ОУМ различны. В то время как ОУМ зависит от распределения и интенсивности, и фазы в поперечной плоскости [100, 122], ТЗ зависит только от фазы [15] и равен сумме порядков всех вихрей в пучке. Гауссовы пучки с множественными оптическими вихрями теоретически исследовались в [19], а в более общем виде структурно устойчивые (инвариантные) гауссовы пучки изучались в [44, 123].

В данном разделе, пользуясь подходом из [44, 123], теоретически исследуются примеры световых полей с бесконечным топологическим зарядом. Первый пример – гауссов пучок с вихревой косинусной функцией, тогда как вторым примером является гауссов пучок с функцией Бесселя первого рода с вихревым аргументом. Для первого пучка аналитически установлено распределение интенсивности и его ОУМ, который оказался конечен. Оба поля инвариантны к распространению и при определённых параметрах в их поперечном сечении имеется два ярких световых пятна, сопровождаемых "бледными" (невидимыми) локальными максимумами низкой интенсивности. Визуально эти пучки подобны модовым пучкам Эрмита-Гаусса порядка (1,0) [8] и астигматическим Фурье-инвариантным гауссовым пучкам [100]. Однако пучки Эрмита-Гаусса имеют нулевой ТЗ, а астигматические Фурье-инвариантные гауссовы пучки имеют конечный ТЗ, тогда как ТЗ исследуемых здесь пучков бесконечен.

5.1.1 Структурно устойчивые гауссовы пучки

В [44, 123] показано (выражение (6.1) в [44]), что любая функция вида

$$E_{\pm}(x, y, z) = \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2}\right) f\left(\frac{x \pm iy}{qw_0}\right), \quad (5.1)$$

где (x, y, z) – декартовы координаты, w_0 – радиус перетяжки гауссова пучка, $q = 1 + iz/z_0$, $f(x \pm iy)$ – произвольная целая аналитическая функция, является решением параксиального уравнения Гельмгольца:

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0. \quad (5.2)$$

Формула (5.1) описывает структурно устойчивые световые поля, распределение интенсивности которых при распространении в пространстве сохраняется (с точностью до масштаба и поворота вокруг оптической оси).

Формула (5.1) позволяет аналитически описывать световые поля с произвольным расположением оптических вихрей [19] в начальной плоскости ($z=0$) в точках с декартовыми координатами (a_j, b_j) ($j = 1, \dots, m$):

$$E(x, y, z) = \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2}\right) \prod_{j=1}^m \left(\frac{x + iy}{q} - a_j - ib_j\right). \quad (5.3)$$

Световое поле (5.3) содержит конечное число m оптических вихрей. Далее мы рассмотрим два световых поля, у которых число оптических вихрей бесконечно. Более того, они все одного знака и потому не компенсируют друг друга, и поэтому топологический заряд таких полей бесконечен.

5.1.2 Гауссов пучок с вихревой косинусной функцией

Пусть в комплексной амплитуде (5.1) взята следующая функция $f(Z)$ (Z – произвольный комплексный аргумент):

$$f(Z) = \cos((w_0 / \alpha_0)Z). \quad (5.4)$$

Тогда поле в начальной плоскости имеет вид:

$$E(x, y, 0) = \cos\left(\frac{x + iy}{\alpha_0}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right), \quad (5.5)$$

а в произвольной плоскости на расстоянии z комплексная амплитуда равна

$$E(x, y, z) = \frac{1}{q} \cos\left(\frac{x + iy}{\alpha_0 q}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2}\right), \quad (5.6)$$

Если повернуть систему координат на угол, равный фазе Гоу [8]:

$$\zeta(z) = \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (5.7)$$

то есть ввести новые декартовы координаты:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \zeta & \sin \zeta \\ -\sin \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2/z_0^2}} \begin{pmatrix} x + yz/z_0 \\ y - xz/z_0 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

то комплексная амплитуда примет вид:

$$E(x', y', z) = \frac{w_0}{w(z)} \cos \left[\frac{x' + iy'}{\alpha(z)} \right] \exp \left[-\frac{x'^2 + y'^2}{w^2(z)} + \frac{ik(x'^2 + y'^2)}{2R(z)} - i\zeta(z) \right], \quad (5.9)$$

где

$$\begin{aligned} w(z) &= w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}, \\ \alpha(z) &= \alpha_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}, \\ R(z) &= z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Далее аргумент z у функций (5.7) и (5.10) будем для краткости опускать. Из (5.10) следует, что ширина гауссова пучка $w(z)$ и масштаб $\alpha(z)$ косинусной функции умножаются на один и тот же коэффициент, поэтому поле (5.9) сохраняет свою форму при распространении. Из (5.9) легко находятся координаты нулей интенсивности. Все они расположены эквидистантно на прямой $y' = 0$ в точках $x' = \alpha(\pi/2 + \pi p)$, где p – целые числа.

Для определения топологического заряда введём в окрестности произвольного нуля интенсивности локальную полярную систему координат (δ, θ) . Тогда вблизи нуля в точке с координатами $(x' = \alpha(\pi/2 + \pi p) + \delta \cos\theta, y' = \delta \sin\theta)$ фаза вихревой части поля (5.9) равна:

$$\begin{aligned} \arg \cos \left(\frac{x' + iy'}{\alpha} \right) &= \arg \cos \left[\frac{\alpha(\pi/2 + \pi p) + \delta e^{i\theta}}{\alpha} \right] = \arg \cos \left[\pi/2 + \pi p + \frac{\delta}{\alpha} e^{i\theta} \right] = \\ &= \arg \left\{ (-1)^{p+1} \sin \left[\frac{\delta}{\alpha} e^{i\theta} \right] \right\} \approx \arg \left\{ (-1)^{p+1} e^{i\theta} \right\} = \theta + \text{const}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Поскольку гауссов пучок не влияет на распределение фазы, топологический заряд оптического вихря вокруг любого нуля интенсивности равен, согласно (5.11), единице. Так как число нулей бесконечно, то общий топологический заряд поля (5.9) также бесконечен.

Далее определим вид дифракционной картины поля (5.9). Распределение интенсивности имеет вид:

$$I(x', y', z) = \frac{1}{2} \frac{w_0^2}{w^2} \left[\cos \left(\frac{2x'}{\alpha} \right) + \cosh \left(\frac{2y'}{\alpha} \right) \right] \exp \left(-2 \frac{x'^2 + y'^2}{w^2} \right). \quad (5.12)$$

Для поиска максимумов интенсивности приравняем нулю частные производные $\partial I / \partial x'$ и $\partial I / \partial y'$. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -\sin\left(\frac{2x'}{\alpha}\right) = \left[\cos\left(\frac{2x'}{\alpha}\right) + \cosh\left(\frac{2y'}{\alpha}\right)\right] \frac{2\alpha x'}{w^2}, \\ \sinh\left(\frac{2y'}{\alpha}\right) = \left[\cos\left(\frac{2x'}{\alpha}\right) + \cosh\left(\frac{2y'}{\alpha}\right)\right] \frac{2\alpha y'}{w^2}. \end{cases} \quad (5.13)$$

Очевидно, $(x', y') = (0, 0)$ является решением такой системы. Интенсивность в этой точке равна $I(0, 0, z) = (w_0/w)^2$. Если $x' \neq 0$ и $y' \neq 0$, то из системы (5.13) следует, что $-(1/x') \sin(2x'/\alpha) = (1/y') \sinh(2y'/\alpha)$. Однако, уравнение $-\sin u/u = \sinh v/v$ не имеет вещественных решений, в чём легко убедиться графически (правая часть не меньше единицы, а левая – строго меньше). Поэтому все локальные максимумы интенсивности располагаются только на декартовых осях x' и y' . Если $y' = 0$, а $x' \neq 0$, то из системы (5.13) следует, что $[\sin(x'/\alpha) + \cos(x'/\alpha)(2\alpha x'/w^2)] \cos(x'/\alpha) = 0$. Случай $\cos(x'/\alpha) = 0$ даёт локальные минимумы, а координаты локальных максимумов находятся из трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}(x'/\alpha) = -2\alpha x'/w^2$. Число этих максимумов бесконечно, и интенсивность в каждом из них, согласно (5.12), равна $I(x', 0, z) = (w_0/w)^2 \cos^2(x'/\alpha) \exp(-2x'^2/w^2)$ и не превышает $(w_0/w)^2$.

Аналогично, если $x' = 0$, а $y' \neq 0$, то из системы (5.13) следует, что координаты локальных максимумов находятся из уравнения $\operatorname{th}(y'/\alpha) = 2\alpha y'/w^2$. Это трансцендентное уравнение может иметь либо один корень (в нуле), либо ещё два корня. При условии $\alpha \ll w$ (то есть $\alpha_0 \ll w_0$) два ненулевых корня равны примерно $y' \approx \pm w^2/(2\alpha)$ и интенсивность в них примерно равна $I(0, y', z) = [w_0/(2w)]^2 \exp(w^2/(2\alpha^2))$ и может намного превышать интенсивность максимума в центре $(w_0/w)^2$. Поэтому при $\alpha_0 \ll w_0$ распределение интенсивности имеет два симметричных глобальных максимума на оси $x' = 0$ и бесконечное число локальных максимумов на оси $y' = 0$, между которыми находятся изолированные нули интенсивности, вокруг которых возникают оптические вихри с топологическим зарядом +1.

При увеличении α (или уменьшении w) два максимума интенсивности сближаются и при условии $\alpha_0 \geq w_0/\sqrt{2}$ уравнение $\operatorname{th}(y'/\alpha) = 2\alpha y'/w^2$ имеет только один корень в нуле. В этом случае вместо двух световых пятен на дифракционной картине имеется одно пятно в центре и множество второстепенных максимумов небольшой интенсивности.

Несмотря на бесконечное число оптических вихрей в пучке (5.9) его орбитальный угловой момент (ОУМ) конечен. Это объясняется тем, что лишь небольшое число вихрей располагается вблизи областей высокой

интенсивности. Найдём далее мощность и ОУМ пучка (5.9) по известным формулам [100, 122]:

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(x, y) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) E(x, y) dx dy, \quad (5.14)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(x, y) E(x, y) dx dy, \quad (5.15)$$

Представляя косинус в (5.9) в виде суммы двух экспонент и используя справочные интегралы 2.4.15.3 и 2.5.36.5 из [124], после подстановки (5.9) в (5.14) и (5.15) получим:

$$J_z = \frac{\pi w_0^4}{4\alpha_0^2} \text{sh} \left(\frac{w_0^2}{2\alpha_0^2} \right), \quad (5.16)$$

$$W = \frac{\pi w_0^2}{2} \text{ch} \left(\frac{w_0^2}{2\alpha_0^2} \right). \quad (5.17)$$

Тогда нормированный ОУМ (ОУМ, делённый на мощность), равен

$$J_z / W = \frac{w_0^2}{2\alpha_0^2} \text{th} \left(\frac{w_0^2}{2\alpha_0^2} \right) \quad (5.18)$$

и при $\alpha_0 \ll w_0$ его можно оценить простым выражением $J_z/W \approx (w_0/\alpha_0)^2/2$.

Если ввести определение линейной плотности оптических вихрей в пучке (5.9) как число вихрей на единицу длины:

$$\rho_0 = \frac{1}{\pi\alpha_0}, \quad (5.19)$$

то при большой плотности вихрей ($\alpha_0 \ll w_0$) ОУМ примерно равен $J_z/W = (\pi w_0 \rho_0)^2/2$, то есть возрастает с плотностью квадратично.

Согласно теории, распределение интенсивности состоит либо из двух ярких световых пятен (при $\alpha_0 \ll w_0$), либо из одного центрального яркого пятна ($\alpha_0 \geq w_0/\sqrt{2}$).

В данном подразделе приведены результаты численного моделирования обоих этих случаев.

На рис. 5.1 показаны распределения интенсивности и фазы пучка (5.9) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения в начальной плоскости (рис. 5.1а, з) вычислены по формуле (5.5), а на расстоянии от неё – по формуле (5.9) (рис. 5.1б, д) и с помощью дискретного преобразования Фурье, реализованного в виде свёртки с ис-

пользованием быстрого преобразования Фурье (рис. 5.1в, е). Использовались следующие параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, масштабный множитель косинусной функции $\alpha_0 = w_0/4$, расстояние распространения $z = 1$ м, область расчёта $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 2$ мм (рис. 5.1а, з) и $R = 3$ мм (рис. 5.1б, в, д, е).

На рис. 5.1 видно совпадение распределений, полученных теоретически, по формуле (5.9), и численно с помощью преобразования Фурье. Также видно, что все оптические вихри располагаются на одной прямой, которая, при распространении пучка, поворачивается против часовой стрелки, и что, согласно теории, действительно на картине интенсивности имеется два световых пятна, расположенных на прямой, перпендикулярной прямой с оптическими вихрями. Согласно выбранным параметрам, нормированный ОУМ светового поля на рис. 5.1 должен быть равен $J_z/W = 8$. Численно получены следующие значения: 7,990329 (рис. 5.1б, д) и 7,988885 (рис. 5.1в, е). Для демонстрации бесконечного топологического заряда его надо вычислить по нескольким окружностям. Для этого рассчитаем распределение фазы (рис. 5.1з) в более широкой области $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 10$ мм (рис. 5.2).

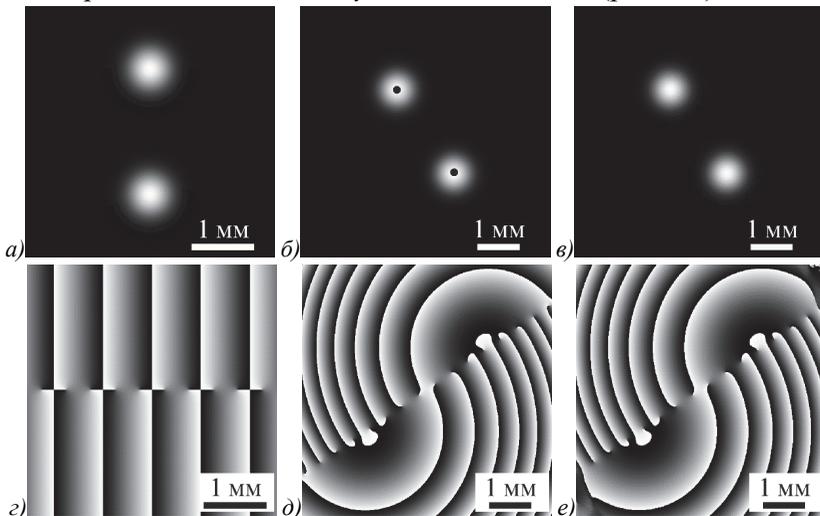


Рис. 5.1. Распределения интенсивности (а, б, в) и фазы (з, д, е) пучка (5.9) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения в начальной плоскости (а, з) вычислены по формуле (5.5), а на расстоянии от неё – по формуле (5.9) (б, д) и с помощью численного преобразования Фурье (в, е). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, масштабный множитель косинусной функции $\alpha_0 = w_0/4$, расстояние распространения $z = 1$ м, область расчёта $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 2$ мм (а, з) и $R = 3$ мм (б, в, д, е). Чёрные точки (б) показывают положения максимумов интенсивности, вычисленные по приближённой формуле $y' \approx \pm w^2/(2\alpha)$

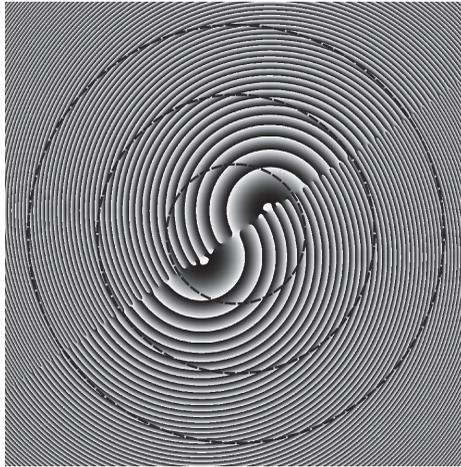


Рис. 5.2. Распределение фазы пучка с рис. 5.1 в более широкой области, рассчитанное по формуле (5.9)

При расчёте топологического заряда по окружностям радиусов $R_1 = 3$ мм, 6 мм и 9 мм были получены соответственно значения $ТС = 12, 26, 38$ (11,98, 25,87 и 37,60).

На рис. 5.3 показаны распределения интенсивности и фазы пучка (5.9) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения в начальной плоскости (рис. 5.3а, з) вычислены по формуле (5.5), а на расстоянии от неё – по формуле (5.9) (рис. 5.3б, д) и с помощью численного преобразования Френеля (рис. 5.3в, е). Параметры расчёта те же самые, что на рис. 5.1, но масштабный множитель косинусной функции равен $\alpha_0 = w_0$, то есть, согласно теории, на дифракционной картине должно получиться одно световое пятно.

Из рис. 5.3 также видно совпадение распределений, полученных теоретически, по формуле (5.9), и численно с помощью преобразования Френеля. На рис. 5.3в, е также видно четыре вихря, расположенных на одной прямой, и одно эллиптическое световое пятно на распределении интенсивности. Согласно выбранным параметрам, нормированный ОУМ светового поля на рис. 5.3 должен быть равен $J_z/W = 0,5 \operatorname{th}(0,5) \approx 0,231$. Численно получены следующие значения: 0,231 (рис. 5.3б, д) и 0,228 (рис. 5.3в, е). Для демонстрации бесконечного топологического заряда также рассчитаем распределение фазы с рис. 5.3д в более широкой области $-R \leq x, y \leq R$ ($R = 10$ мм) (рис. 5.4) и вычислим топологический заряд по нескольким окружностям.

При расчёте топологического заряда по окружностям радиусов $R_1 = 3$ мм, 6 мм и 9 мм были получены соответственно значения $ТС = 4,$

6, 10 (3,99, 5,97 и 9,89), то есть ТЗ возрастает с увеличением радиуса окружности, по которой он рассчитан.

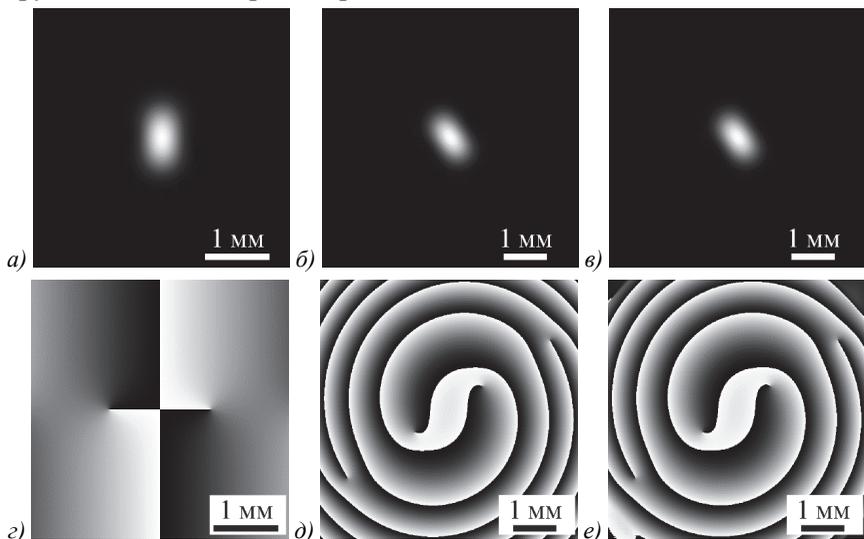


Рис. 5.3. Распределения интенсивности (а, б, в) и фазы (г, д, е) пучка (5.9) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения в начальной плоскости (а, г) вычислены по формуле (5.5), а на расстоянии от неё – по формуле (5.9) (б, д) и с помощью численного преобразования Френеля (в, е). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, масштабный множитель косинусной функции $a_0 = w_0$, расстояние распространения $z = 1$ м, область расчёта $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 2$ мм (а, г) и $R = 3$ мм (б, в, д, е)

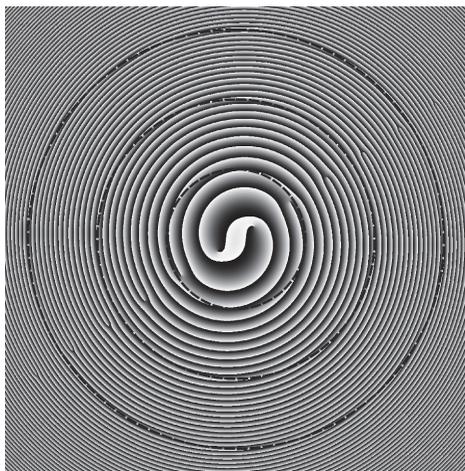


Рис. 5.4. Распределение фазы пучка с рис. 5.3 в более широкой области, рассчитанное по формуле (5.9)

5.1.3 Гауссов пучок с вихревой функцией Бесселя

Пусть теперь в комплексной амплитуде (5.1) выбрана другая функция $f(Z)$ (Z – произвольный комплексный аргумент):

$$f(Z) = J_m((w_0 / \alpha_0) \cdot Z), \quad (5.20)$$

где $J_m()$ – функция Бесселя первого рода m -го порядка.

Тогда в произвольной поперечной плоскости комплексная амплитуда равна:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{q} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2}\right) J_m\left(\frac{x + iy}{\alpha_0 q}\right). \quad (5.21)$$

Перепишем комплексную амплитуду (5.21) в поворнутой системе координат (5.8):

$$E(x', y', z) = \frac{w_0}{w} J_m\left(\frac{x' + iy'}{\alpha}\right) \exp\left[-\frac{x'^2 + y'^2}{w^2} + \frac{ik}{2R}(x'^2 + y'^2) - i\zeta\right], \quad (5.22)$$

где величины w , α , R , ζ зависят от расстояния z и определяются выражениями (5.7), (5.10). Известно, что все нули функции Бесселя вещественны. Из (5.22) следует, что, как и у пучка (5.9), нули располагаются на одной прямой, но в отличие от пучка (5.9) они не эквидистантны и располагаются в точках с координатами $(x', y') = (\pm \alpha \gamma_{m,p}, 0)$, где $\gamma_{m,p}$ – p -й нуль функции Бесселя m -го порядка. Кроме того, центральный ноль интенсивности имеет m -й порядок, поскольку нулевой корень функции Бесселя m -го порядка имеет также m -й порядок. Аналогично пучку (5.9) можно показать, что все остальные нули интенсивности имеют порядок $+1$ и потому ТЗ всего пучка бесконечен.

На рис. 5.5 показаны распределения интенсивности и фазы пучка (5.22) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения вычислены по формуле (5.22) (рис. 5.5а, б, з, д) и с помощью численного преобразования Френеля (рис. 5.5в, е). Использовались следующие параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, порядок функции Бесселя $m = 3$, масштабный множитель вихревой функции Бесселя $\alpha_0 = w_0/4$, расстояние распространения $z = 1$ м, область расчёта $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 2$ мм (рис. 5.5а, з) и $R = 3$ мм (рис. 5.5б, в, д, е).

На рис. 5.5 видно совпадение распределений, полученных теоретически, по формуле (5.22), и численно с помощью преобразования Френеля (кроме областей вблизи углов). Также видно, что все оптические вихри располагаются на одной прямой, которая, при распространении

пучка, поворачивается против часовой стрелки. Распределение интенсивности имеет тот же вид, что и у пучка с косинусной функцией (5.9), однако нули располагаются уже не эквидистантно, и в центре ноль имеет не первый, а третий порядок. При вычислении ТЗ по трём разным окружностям (радиусов $R_1 = 3$ мм, 6 мм и 9 мм) на распределении фазы (рис. 5.6) были получены значения, возрастающие с радиусом: 13, 25, 37 (12,98, 24,88, 36,62), то есть ТЗ пучка (5.22) бесконечен. При этом ОУМ пучка (5.22) конечен и равен примерно 8,14.

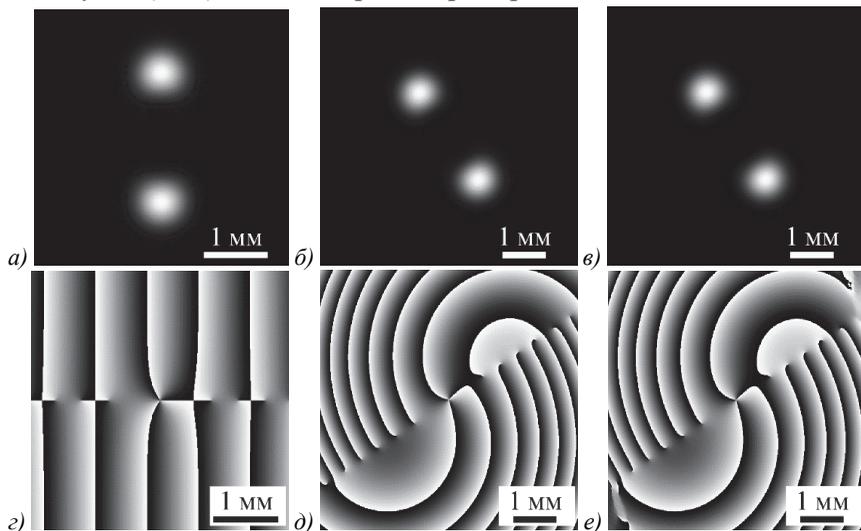


Рис. 5.5. Распределения интенсивности (а, б, в) и фазы (г, д, е) пучка (5.22) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения вычислены по формуле (5.22) (а, б, г, д) и с помощью численного преобразования Френеля (в, е). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, порядок функции Бесселя $m = 3$, масштабный множитель вихревой функции Бесселя $a_0 = w_0/4$, расстояние распространения $z = 1$ м, область расчёта $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 2$ мм (а, г) и $R = 3$ мм (б, в, д, е)

В этом разделе мы рассмотрели ОВ с бесконечным ТЗ. Такие ОВ имеют счетное число центров сингулярности фазы (изолированных нулей интенсивности), как правило, с единичным ТЗ, которые расположены эквидистантно (или не эквидистантно) на прямой линии в поперечном сечении пучка. Такие ОВ структурно-стабильные и при распространении в пространстве изменяются масштабно и вращаются. Орбитальный угловой момент таких ОВ конечный, так как только конечное число винтовых дислокаций попадает в область гауссова пучка с заметной интенсивностью. Остальные же центры сингулярности фазы нахо-

дятся на периферии (и на бесконечности), где интенсивность почти нулевая. На практике сформировать такие пучки можно с помощью SLM, но применяя алгоритмы кодирования амплитудно-фазовых функций $\cos(x+iy)$ или $J_m(x+iy)$ только в фазовую функцию.

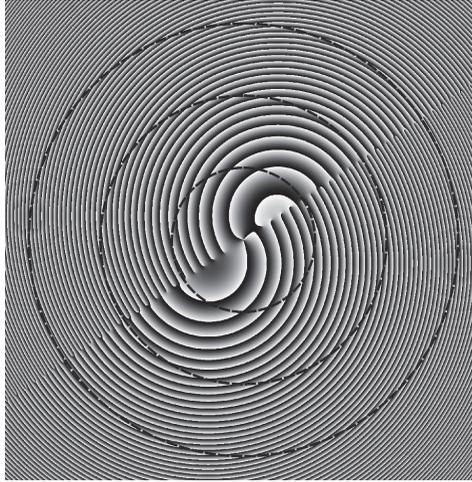


Рис. 5.6. Распределение фазы пучка с рис. 5.5 в более широкой области $-R \leq x, y \leq R$ ($R = 10$ мм), рассчитанное по формуле (5.22)

5.2 Оптические вихри с бесконечным числом винтовых дислокаций

Топологический заряд – одна из важнейших характеристик оптических вихрей [15, 125]. Для простых оптических вихрей (винтовых дислокаций), у которых имеется только один n -кратно вырожденный изолированный ноль интенсивности (n – целое число), ТЗ равен целому числу полных периодов изменения фазы (период равен 2π) при обходе вокруг нуля интенсивности по любой замкнутой траектории. Оптические вихри с одной центральной винтовой дислокацией могут иметь большие, но конечные, ТЗ, например, 10010 [121]. Понятно, что если у светового поля имеется несколько винтовых дислокаций, связанных с несколькими нулями интенсивности, находящимися в разных точках пространства в сечении пучка, то ТЗ всего поля будет равен сумме ТЗ каждого отдельного оптического вихря. Расщепить оптический вихрь с одним нулем и одной винтовой дислокацией с ТЗ n на n отдельных оптических вихрей с единичным ТЗ можно простым добавлением к оптическому вихрю гауссова пучка или плоской волны с любой малой амплитудой [126]. В настоящее время известно множество способов получения мульти-сингулярных оптических вихрей [127]. На принципе

расщепления единичного оптического вихря с ТЗ n на n простых оптических вихрей основано много методов измерения ТЗ [24, 34, 118, 128, 129, 130, 131, 132]. В [34, 128, 129] для измерения ТЗ оптического вихря использовали дифракцию на треугольной апертуре. Для измерения ТЗ также использовался наклон сферической линзы [130], цилиндрическая линза [24], астигматическая фазовая маска [131], секторные полуволновые пластинки [132] и спиральная решётка с изменяющимся периодом [118]. Новые варианты традиционных интерферометрических методов измерения ТЗ также используются в настоящее время [133, 134, 135, 136].

Кроме отдельных симметричных оптических вихрей (например, мод Лагерра-Гаусса, пучков Бесселя-Гаусса) и оптических полей с многими сингулярностями, у которых определение ТЗ не представляет трудностей, известны также световые поля с начальным дробным ТЗ [15] и суперпозиции оптических вихрей [38]. Определение ТЗ для таких полей составляет определённую трудность. Для расчёта ТЗ сложных оптических вихрей используют формулу Берри [15]. Световые поля с начальным дробным ТЗ при распространении в свободном пространстве приобретают целый ТЗ, который может изменяться по мере распространения [43, 68, 137, 138]. Суперпозиция оптических вихрей [38] также может изменять ТЗ при распространении. У суперпозиции оптических вихрей может вообще быть неопределённый ТЗ. Например, у соосной суперпозиции двух разных бездифракционных пучков Бесселя, амплитуда которой описывается суммой двух разных функций Бесселя с номерами n и m , ТЗ будет равен то n , то m при изменении расстояния от оси пучка. Заметим для полноты картины, что ТЗ изменяется при распространении и у оптических вихрей, сформированных с помощью спиральных щелей в непрозрачном экране (спиралей Архимеда или Ферма) [94]. Формировать оптические вихри с управляемым топологическим зарядом можно с помощью микролазера [139], метаповерхности [140] и других компонент нанофотоники [127].

Из приведённого краткого обзора по определению, измерению и эволюции ТЗ оптических вихрей следует, что до сих пор рассматривались только оптические вихри с конечным ТЗ, хотя и большим [121]. Возникает вопрос: существуют ли оптические вихри, имеющие бесконечный ТЗ? Существуют ли точные решения параксиального уравнения Гельмгольца, описывающие световые поля с конечной энергией, конечным орбитальным угловым моментом (ОУМ), но с бесконечным ТЗ? Как экспериментально доказать, что ТЗ действительно бесконечный, если его нельзя измерить?

В этом разделе мы приведём два конкретных примера структурно устойчивых оптических вихрей с конечной энергией и бесконечным ТЗ. Приведём также аналитические выражения для их комплексной амплитуды, распределения интенсивности и нормированного ОУМ. Основной особенностью рассмотренных пучков является то, что почти всё счётное множество винтовых дислокаций находится там, где интенсивность света почти нулевая.

5.2.1 Косинусный оптический вихрь с квадратичным аргументом

В [123] показано, что любая функция вида

$$E_{\pm}(x, y, z) = (1/q) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2}\right) f\left(\frac{(x \pm iy)}{qw_0}\right), \quad (5.23)$$

где (x, y, z) – декартовы координаты, w_0 – радиус перетяжки гауссова пучка, $q = 1 + iz/z_0$, $z_0 = kw_0^2/2$ – длина Рэлея, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число света с длиной волны λ , $f(x \pm iy)$ – произвольная целая аналитическая функция, являющаяся решением параксиального уравнения Гельмгольца:

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0. \quad (5.24)$$

Формула (5.23) описывает структурно устойчивые световые поля, распределение интенсивности которых при распространении в пространстве сохраняется (с точностью до масштаба и поворота вокруг оптической оси). Рассмотрим далее конкретный пример пучка (5.23) с бесконечным топологическим зарядом. Рассмотрим структурно-стабильный пучок, амплитуда которого описывается гауссовой функцией, умноженной на функцию косинуса с вихревым аргументом в квадрате:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{q} \cos\left(\frac{x + iy}{\alpha_0 q}\right)^2 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2}\right). \quad (5.25)$$

Во вращающихся декартовых координатах

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \zeta & \sin \zeta \\ -\sin \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2/z_0^2}} \begin{pmatrix} x + yz/z_0 \\ y - xz/z_0 \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

где угол поворота равен фазе Гоу [8]:

$$\zeta(z) = \arctg(z/z_0), \quad (5.27)$$

амплитуда пучка (5.23) будет иметь вид:

$$E(x', y', z) = \frac{w_0}{w(z)} \cos\left[\frac{x' + iy'}{\alpha(z)}\right]^2 \exp\left[-\frac{x'^2 + y'^2}{w^2(z)} + \frac{ik(x'^2 + y'^2)}{2R(z)} - i\zeta(z)\right], \quad (5.28)$$

где

$$\begin{aligned} w(z) &= w_0 \sqrt{1 + z^2 / z_0^2}, \\ \alpha(z) &= \alpha_0 \sqrt{1 + z^2 / z_0^2}, \\ R(z) &= z(1 + z_0^2 / z^2). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Выполнив возведение в квадрат в аргументе косинуса в (5.28), получим:

$$\begin{aligned} E(x', y', z) &= \frac{w_0}{w(z)} \cos \left[\frac{x'^2 - y'^2 + i2x'y'}{\alpha^2(z)} \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{x'^2 + y'^2}{w^2(z)} + \frac{ik(x'^2 + y'^2)}{2R(z)} - i\zeta(z) \right]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Из (5.30) видно, что аргумент косинуса будет действительной величиной либо при $x' = 0$, либо при $y' = 0$. Поэтому действительные нули функции косинуса будут располагаться на двух осях x' и y' и будут иметь следующие координаты:

$$\begin{cases} x' = \pm \alpha \sqrt{\pi / 2 + \pi p}, & y' = 0, & p = 0, 1, 2, \dots, \\ y' = \pm \alpha \sqrt{\pi / 2 + \pi p}, & x' = 0, & p = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.31)$$

Из (5.31) видно, что изолированные нули поля (5.30) будут с ростом номера p «уплотняться», то есть расстояние между соседними нулями будет квадратично уменьшаться. Вокруг каждого такого нуля сформируется оптический вихрь $(x' + iy')^2$ с ТЗ, равным +2. Всего нулей будет счётное число, и поэтому ТЗ пучка (5.25) бесконечный. Интенсивность пучка (5.30) имеет вид:

$$I(x', y', z) = \frac{1}{2} \frac{w_0^2}{w^2} \exp \left(-2 \frac{x'^2 + y'^2}{w^2} \right) \left[\cos \left(\frac{2(x'^2 - y'^2)}{\alpha^2} \right) + \cosh \left(\frac{4x'y'}{\alpha^2} \right) \right]. \quad (5.32)$$

Можно показать, что на распределении интенсивности (5.32) имеется только один максимум, расположенный в центре ($x' = y' = 0$). Но этот максимум имеет место только при определённом условии. Из (5.32) видно, что при больших расстояниях $x' = \pm y' \rightarrow \infty$ интенсивность пропорциональна гауссовой функции:

$$I(x' = y' \rightarrow \infty, z) \sim \exp \left(-4x'^2 \left(\frac{1}{w^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right). \quad (5.33)$$

Поэтому поле (5.30) обладает конечной энергией и имеет один максимум в центре только, если $w < \alpha$. Найдём ОУМ и мощность пучка (5.30) по известным формулам [43]:

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(x, y) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) E(x, y) dx dy, \quad (5.34)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(x, y) E(x, y) dx dy. \quad (5.35)$$

Подставив (5.25) в (5.34), (5.35), можно найти ОУМ и мощность пучка (5.30):

$$J_z = \left(\frac{\pi \alpha_0^2 w_0^6}{4} \right) \left[(\alpha_0^4 - w_0^4)^{-3/2} - (\alpha_0^4 + w_0^4)^{-3/2} \right], \quad (5.36)$$

$$W = \left(\frac{\pi \alpha_0^2 w_0^2}{4} \right) \left[(\alpha_0^4 - w_0^4)^{-1/2} + (\alpha_0^4 + w_0^4)^{-1/2} \right]. \quad (5.37)$$

Из (5.36) и (5.37) видно, что при $w = \alpha$ ОУМ и мощность пучка (5.30) становятся бесконечными, а при $w > \alpha$ они становятся мнимыми величинами. Нормированный ОУМ будет равен выражению:

$$\frac{J_z}{W} = w_0^4 \frac{(\alpha_0^4 - w_0^4)^{-3/2} - (\alpha_0^4 + w_0^4)^{-3/2}}{(\alpha_0^4 - w_0^4)^{-1/2} + (\alpha_0^4 + w_0^4)^{-1/2}}. \quad (5.38)$$

Из (5.38) видно, что при $\alpha_0 < w_0$ (условие конечности энергии пучка) ОУМ всегда положительный. Кроме того, существенных значений ОУМ может принимать при $\alpha_0 \approx w_0$, а при больших значениях $\alpha_0 \gg w_0$ нормированный ОУМ пучка (5.30) стремится к нулю. Это и понятно, так как при $\alpha_0 \gg w_0$ все нули интенсивности (все оптические вихри) находятся на периферии там, где интенсивность почти нулевая. А вид интенсивности (5.32) при этом описывается гауссовой функцией с центром в начале координат. Таким образом, несмотря на то, что пучок (5.30) имеет бесконечный ТЗ и счётное число оптических вихрей, которые лежат на двух перпендикулярных прямых и уплотняются с ростом номера нуля, нормированный ОУМ такого пучка небольшой и стремится к нулю при $\alpha_0 \gg w_0$.

На рис. 5.7 показаны распределения интенсивности и фазы пучка (5.30) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения получены по формуле (5.32) для следующих параметров расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, масштабный множитель квадратичной косинусной огибающей $\alpha_0 = 1,1w_0$,

расстояние распространения $z=1$ м, область расчёта $|x|, |y| \leq R$, где $R=1,5$ мм (рис. 5.7а), $R=5$ мм (рис. 5.7б, з) и $R=3$ мм (рис. 5.7в).

На рис. 5.7 видно, что все оптические вихри располагаются на двух перпендикулярных прямых y и x , которые поворачиваются при распространении. Распределение интенсивности имеет вид квадрата с заострёнными углами (четырёхконечной звезды) и имеет один максимум в центре. Нули интенсивности располагаются на декартовых осях, и плотность этих нулей возрастает от центра к периферии. Так как все нули имеют порядок $+2$, общий ТЗ пучка (5.30) бесконечен. Расчёт нормированного ОУМ по распределениям на рис. 5.7в, з и по формуле (5.38) даёт примерно одинаковые значения: 1,380 и 1,379.

Если $\alpha_0 = w_0(1+\delta)$, где $\delta \ll 1$, то нормированный ОУМ может принимать большие значения и, согласно (5.38), может быть приближённо вычислен по формуле

$$J_z/W \approx 1/4\delta. \quad (5.39)$$

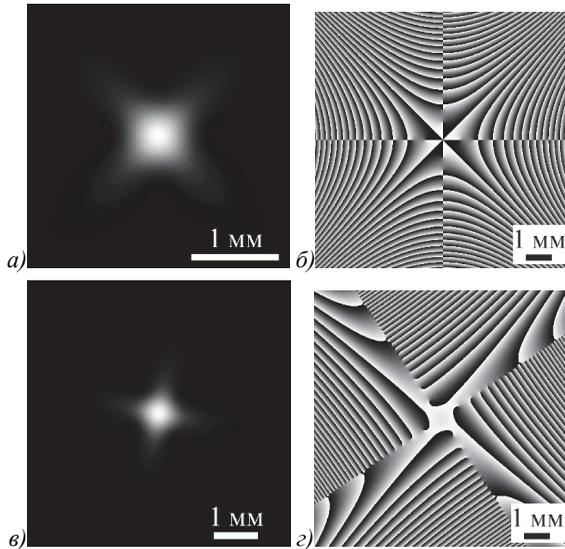


Рис. 5.7. Распределения интенсивности (а, в) и фазы (б, з) пучка (5.30) в начальной плоскости (а, б) и после распространения в пространстве (в, з), вычисленные по формуле (5.30). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, масштабный множитель квадратичной косинусной огибающей $\alpha_0 = 1,1w_0$, расстояние распространения $z = 1$ м, область расчёта $|x|, |y| \leq R$, где $R = 1,5$ мм (а), $R = 5$ мм (б, з) и $R = 3$ мм (в)

На рис. 5.8 показаны распределения интенсивности и фазы пучка (5.30) в начальной плоскости и после распространения в пространстве

при тех же параметрах, что и на рис. 5.7, но при $\alpha_0 = 1,01w_0$. Из-за условия $\alpha_0 \approx w_0$ интенсивность убывает вдоль прямых $y = \pm x$ гораздо слабее, чем на рис. 5.7, и поэтому в поперечном сечении пучок имеет форму креста. Согласно (5.38), нормированный ОУМ должен быть равен примерно $J_z/W \approx 25$. Расчёт по распределениям на рис. 5.8 с помощью формул (5.34), (5.35) даёт значение 21,42.

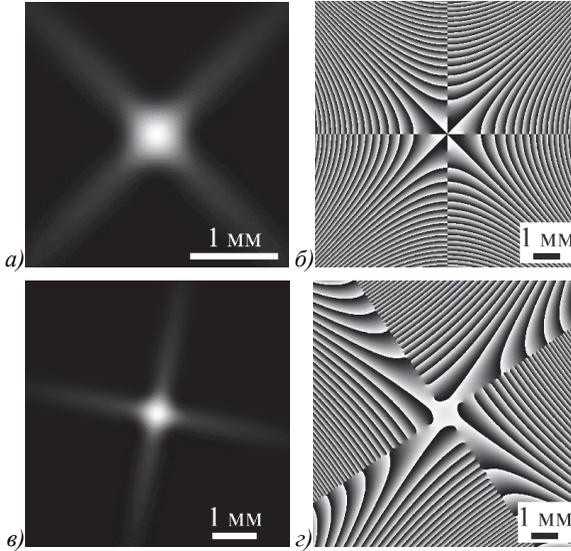


Рис. 5.8. Распределения интенсивности (а, в) и фазы (б, г) пучка (5.30) в начальной плоскости (а, б) и после распространения в пространстве (в, г), вычисленные по формуле (5.30). Параметры расчёта те же, что и на рис. 5.7, но $\alpha_0 = 1,01w_0$

5.2.2 Косинусный оптический вихрь высокого порядка

Рассмотрим еще один структурно-стабильный пучок с бесконечным ТЗ, аналогичный пучку (5.6), но у которого, в отличие (5.6), функция косинуса взята в некоторой степени:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{q} \cos^m \left(\frac{x + iy}{\alpha_0 q} \right) \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{qw_0^2} \right). \quad (5.40)$$

Из (5.40) видно, что при $y=0$ косинус становится действительной функцией, у которой нули расположены на горизонтальной оси в точках с координатами $x_p = \alpha(\pi/2 + \pi p)$, где p – целые числа. Вблизи этих изолированных нулей амплитуды вместо косинуса можно записать амплитуду вида $(x - x_p + iy)^m$. То есть вокруг нулей интенсивности сформируются оптические вихри с ТЗ m . Заметим, что для того, чтобы нули

амплитуды (центры сингулярности фазы) были расположены на вертикальной оси, вместо аргумента косинуса $x + iy$ нужно выбрать аргумент $ix - y$. Во вращающейся системе координат (5.26), комплексная амплитуда (5.40) будет иметь вид:

$$E(x', y', z) = \frac{w_0}{w(z)} \cos^m \left[\frac{x' + iy'}{\alpha(z)} \right] \times \exp \left[-\frac{x'^2 + y'^2}{w^2(z)} + \frac{ik(x'^2 + y'^2)}{2R(z)} - i\zeta(z) \right]. \quad (5.41)$$

Интенсивность поля (5.41) будет иметь вид:

$$I(x', y', z) = 2^{-m} \frac{w_0^2}{w^2} \exp \left(-2 \frac{x'^2 + y'^2}{w^2} \right) \left[\cos \left(\frac{2x'}{\alpha} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{2y'}{\alpha} \right) \right]^m. \quad (5.42)$$

У интенсивности (5.42) есть локальный максимум в начале координат $(x', y') = (0, 0)$, где интенсивность принимает значение $I(0, 0, z) = 2^{-m} (w_0/w)^2$. Два других основных локальных максимума будут лежать на прямой $y' (x' = 0)$. Действительно, из (5.42) видно, что интенсивность будет сначала возрастать как гиперболический косинус вдоль прямой y' . А потом убывать, из-за спадающей гауссовой экспоненты. Точку максимума можно найти из функции интенсивности (5.42) при $x' = 0$:

$$I(x' = 0, y' \gg 1, z) = 2^{-2m} \frac{w_0^2}{w^2} \exp \left(2 \frac{my'}{\alpha} - 2 \frac{y'^2}{w^2} \right). \quad (5.43)$$

Беря производную от интенсивности (5.43) по y' и приравнивая её нулю, найдём координаты максимума (другой максимум будет расположен симметрично при отрицательных значениях y'): $y'_{\max} = \pm mw^2/(2\alpha)$. Из этого выражения видно, что с ростом номера m будет расти расстояние между максимумами интенсивности на оси y' . Величина максимумов интенсивности будет равна:

$$I_{\max}(x' = 0, y'_{\max}, z) = 2^{-2m} \frac{w_0^2}{w^2} \exp \left(\frac{m^2 w^2}{2\alpha^2} \right). \quad (5.44)$$

Из (5.44) видно, что с ростом m максимальное значение интенсивности экспоненциально возрастает. Таким образом, оптический вихрь (5.40) имеет распределение интенсивности, в основном состоящее из двух световых круглых пятен, центры которых лежат на прямой, перпендикулярной прямой, на которой лежит счётное число нулей интенсивности (центров сингулярности фазы). Вокруг каждого такого центра

формируется оптический вихрь с топологическим зарядом m . При распространении в пространстве пучок расширяется и вращается. На расстоянии Рэлея пучок повернётся на 45 градусов, а в дальней зоне – на 90 градусов.

Представим поле (5.40) в начальной плоскости в цилиндрических координатах (r, φ, z) и разложим его в ряд по угловым гармоникам $E_n(r)$:

$$E(r, \varphi, 0) = \cos^m \left(\frac{re^{i\varphi}}{\alpha_0} \right) \exp \left(-\frac{r^2}{w_0^2} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(r) \exp(in\varphi). \quad (5.45)$$

Каждая угловая гармоника находится следующим образом:

$$\begin{aligned} E_n(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(r, \varphi, 0) \exp(-in\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^m \left(\frac{re^{i\varphi}}{\alpha_0} \right) \exp \left(-\frac{r^2}{w_0^2} - in\varphi \right) d\varphi. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Разложив функцию $f(x) = \cos^m x$ в ряд Тейлора:

$$\cos^m x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{2^m p!} \left[\sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (2s-m)^p \right] x^p, \quad (5.47)$$

угловая гармоника (5.46) может быть переписана в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_n(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{2^m p!} \left[\sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (2s-m)^p \right] \left(\frac{r}{\alpha_0} \right)^p \times \\ &\times \exp \left(-\frac{r^2}{w_0^2} + ip\varphi - in\varphi \right) d\varphi. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Вычисляя интеграл по φ , получаем, что угловые гармоники отрицательных порядков тождественно равны нулю, а для порядков $n \geq 0$ они равны

$$E_n(r) = \frac{i^n}{2^m n!} \left[\sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (2s-m)^n \right] \left(\frac{r}{\alpha_0} \right)^n \exp \left(-\frac{r^2}{w_0^2} \right). \quad (5.49)$$

Можно показать, что при нечётных n угловые гармоники (5.49) также тождественно равны нулю. При чётных же n угловые гармоники (5.49) представляют собой моды Лагерра-Гаусса порядка $(0, n)$ в начальной плоскости.

Итак, световое поле (5.40) является суперпозицией бесконечного числа однокольцевых (то есть с нулевым радиальным индексом) мод Лагерра-Гаусса с чётными неотрицательными топологическими зарядами.

Энергия каждой моды находится по формуле:

$$W_n = 2\pi \int_0^\infty |E_n(r)|^2 r dr = \frac{\pi w_0^2}{2^{2m+1} n!} \left[\sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (2s-m)^n \right]^2 \left(\frac{w_0^2}{2\alpha_0^2} \right)^n. \quad (5.50)$$

Энергия всего пучка (5.40) находится как сумма энергий всех мод:

$$W = \sum_{n=-\infty}^\infty W_n = \frac{\pi w_0^2}{2^{2m+1}} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \left[\sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (2s-m)^n \right]^2 \left(\frac{w_0^2}{2\alpha_0^2} \right)^n. \quad (5.51)$$

Бесконечная сумма по n является рядом Тейлора экспоненциальной функции, поэтому (5.51) можно записать следующим образом:

$$W = \frac{\pi w_0^2}{2^{2m+1}} \sum_{s_1=0}^m \sum_{s_2=0}^m \binom{m}{s_1} \binom{m}{s_2} \exp \left[\frac{w_0^2}{2\alpha_0^2} (2s_1-m)(2s_2-m) \right]. \quad (5.52)$$

Вычисляя сумму по s_2 , получим:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\pi w_0^2}{2^{2m+1}} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \exp \left[-m \frac{w_0^2}{2\alpha_0^2} (2s-m) \right] \left\{ 1 + \exp \left[\frac{w_0^2}{\alpha_0^2} (2s-m) \right] \right\}^m = \\ &= \frac{\pi w_0^2}{2^{m+1}} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \text{ch}^m \xi_s, \end{aligned} \quad (5.53)$$

где $\xi_s = (w_0/\alpha_0)^2 (s-m/2)$.

Аналогично через гиперболические функции представляется и орбитальный угловой момент:

$$J_z = \sum_{n=-\infty}^\infty n W_n = m \frac{\pi w_0^2}{2^{m+1}} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \xi_s \text{ch}^m \xi_s \text{th} \xi_s. \quad (5.54)$$

Орбитальный угловой момент, нормированный на мощность, равен:

$$\frac{J_z}{W} = m \frac{\sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \xi_s \text{ch}^m \xi_s \text{th} \xi_s}{\sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \text{ch}^m \xi_s}. \quad (5.55)$$

Из этого выражения получают простые формулы для нормированного ОУМ при небольших порядках m . Так, при $m=1$ ОУМ равен $J_z/W = \xi \text{th} \xi$, где $\xi = (w_0/\alpha_0)^2/2$, а при $m=2$ ОУМ равен $J_z/W = \xi \text{sh}(2\xi) / [1 + \text{ch}^2(\xi)]$, где $\xi = (w_0/\alpha_0)^2$.

Из (5.55) следует, что при большом периоде нулей функции косинуса в (5.40), когда $\alpha_0 \gg w_0$, ОУМ пучка (5.40) стремится к нулю пропорционально $J_z/W \sim (w_0/\alpha_0)^4$.

Если, наоборот, $\alpha_0 \ll w_0$, то из (5.55) для произвольного порядка m следует простая приближённая формула для расчёта нормированного ОУМ:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{m^2}{2} \frac{w_0^2}{\alpha_0^2}. \quad (5.56)$$

Квадратичную зависимость ОУМ от порядка m можно объяснить следующим образом. Выше из распределения интенсивности (5.42) получены координаты двух главных максимумов интенсивности: $x'_{\max} = 0$ и $y'_{\max} = \pm mw^2/(2\alpha)$, то есть расстояние от максимума светового пятна до центра прямо пропорционально m . Кроме того, согласно распределению интенсивности (5.41), период косинуса уменьшается также пропорционально m , то есть пропорционально m увеличивается и градиент фазы в окрестности максимума. В итоге, микрочастица, оказавшись в поле (5.40) m -го порядка, втягивается в световое пятно, расположенное в m раз дальше от центра, и азимутальная составляющая силы (вектора Пойнтинга), действующей на частицу, также возрастает в m раз. Возрастание в m раз и силы, и плеча, приводит к возрастанию момента в m^2 раз.

На рис. 5.9 показаны распределения интенсивности и фазы пучка (5.40) в начальной плоскости и после распространения в пространстве. Распределения получены по формуле (5.40) для следующих параметров расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, масштабный множитель косинусной функции $\alpha_0 = w_0/4$, показатель степени косинусной функции $m = 3$, расстояние распространения $z = 1$ м, область расчёта $|x|, |y| \leq R$, где $R = 5$ мм.

На рис. 5.9 видно, что все оптические вихри располагаются эквидистантно на одной прямой (горизонтальной в начальной плоскости), которая поворачивается при распространении, но вихри эти уже не первого порядка, а третьего ($m = 3$). Распределение интенсивности имеет вид двух световых пятен, центры которых лежат на оси, перпендикулярной оси, на которой лежат нули интенсивности (центры фазовых сингулярностей). Так как все нули имеют порядок $+3$, общий ТЗ пучка (5.40) бесконечен. Согласно (5.56), нормированный ОУМ при выбранных параметрах должен быть равен $J_z/W = 8m^2 = 72$. Численный расчёт по распределениям интенсивности и фазы с рис. 5.9а, б с помощью формул (5.34), (5.35) даёт значение 71.758.

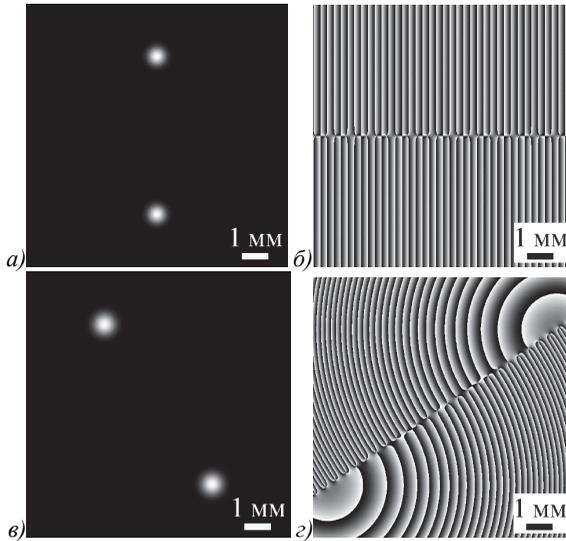


Рис. 5.9. Распределения интенсивности (а, в) и фазы (б, г) пучка (5.40) в начальной плоскости (а, б) и после распространения в пространстве (в, г), вычисленные по формуле (5.40). Параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 0,5$ мм, масштабный множитель косинусной функции $\omega_0 = w_0/4$, показатель степени косинусной функции $m = 3$, расстояние распространения $z = 1$ м, область расчёта $|x|, |y| \leq R$, где $R = 5$ мм

На рис. 5.10 показан ОУМ-спектр пучка с рис. 5.9. Из рис. 5.10 видно, что при выбранных параметрах он состоит из однокольцевых мод Лагерра-Гаусса чётных порядков, заметную энергию из которых имеют моды порядков от 50 до 100, а наибольшую энергию имеет мода 72-го порядка, то есть как раз порядка, равного нормированному ОУМ. Численный расчёт показал, что, аналогично, при $m=2$ наибольшую энергию имеет мода 32-го порядка ($J_z/W = 8m^2 = 32$), а при $m=1$ – мода 8-го порядка ($J_z/W = 8m^2 = 8$).

То, что у пучка с широким ОУМ-спектром нормированный орбитальный угловой момент примерно равен ОУМ центральной угловой гармонике, следует из симметричности картины на рис. 5.10. Действительно, если ОУМ-спектр симметричный, то для ОУМ можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 J_z &= \sum_{p=-n}^n (n-p)W_{n-p} = nW_n + \sum_{p=1}^n [(n-p)W_{n-p} + (n+p)W_{n+p}] = \\
 &= nW_n + 2\sum_{p=1}^n nW_{n-p} = 2n\sum_{p=1}^n W_{n-p} = nW,
 \end{aligned}
 \tag{5.57}$$

где n – топологический заряд (номер) среднего оптического вихря в спектре (рис. 5.10), W_{n-p} – весовые коэффициенты каждой составляющей ОУМ-спектра, W – мощность всего пучка. Если ОУМ-спектр симметричный, то есть $W_{n-p} = W_{n+p}$, то сумма номеров двух симметричных относительно центра составляющих ОУМ-спектра равна удвоенному номеру центральной составляющей ОУМ-спектра: $(n-p)+(n+p) = 2n$ при любом $p = 1, 2, 3, \dots$. Тогда для симметричного ОУМ-спектра имеет место равенство: $J_z/W = n$. Для ОУМ-спектра (5.50) при $m=2$ можно точно показать, что номер ОУМ-гармоники с максимальным весом n равен нормированному ОУМ $J_z/W = (mw_0)^2/(2\alpha_0^2) = 2(w_0/\alpha_0)^2 = a$. Действительно, при $m=2$ выражение для коэффициентов ОУМ-спектра (5.50) упрощается: $W_n = (\pi w_0^2/8)^2 a^n/n!$. Чтобы разница двух соседних коэффициентов ОУМ-спектра (5.50) была равна нулю (чтобы был максимум), то есть $W_{n-1} - W_n = (\pi w_0^2/8)^2 a^{n-1}(n-a)/n! = 0$, нужно, чтобы выполнялось равенство $n = a$.

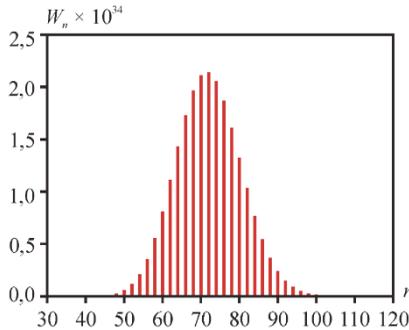


Рис. 5.10. ОУМ-спектр пучка, показанного на рис. 5.9 ($m = 3$)

5.2.3 Астигматический косинусный вихрь с квадратичным аргументом

Рассмотрим комплексную амплитуду света, описывающую одномерную горизонтальную решётку с косинусным пропусканием и с квадратичным аргументом, внедрённую в перетяжку гауссова пучка, в которой также размещена цилиндрическая линза, повернутая на 45 градусов к декартовым координатам:

$$E_1(x, y) = \cos\left(\alpha \frac{x^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \exp\left[-\frac{ik}{4f}(x + y)^2\right], \quad (5.58)$$

где (x, y) – декартовы координаты, w_0 – радиус перетяжки гауссова пучка, α – безразмерный параметр, определяющий масштаб косинусной модуляции, f – фокусное расстояние цилиндрической линзы. После

прохождения пучка (5.58) через параксиальную ABCD-систему комплексная амплитуда примет вид:

$$E_2(u, v) = \frac{-ik}{2\pi B} \exp\left[\frac{ikD}{2B}(u^2 + v^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(x, y) \times \exp\left\{\frac{ik}{2B}[A(x^2 + y^2) - 2(ux + vy)]\right\} dx dy, \quad (5.59)$$

где (u, v) – декартовы координаты в выходной плоскости. Подставим (5.58) в (5.59) и получим:

$$E_2(u, v) = \frac{-ik}{2\pi B} \exp\left[\frac{ikD}{2B}(u^2 + v^2)\right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\alpha \frac{x^2}{w_0^2}\right) \times \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} - \frac{ik}{4f}(x + y)^2\right\} \exp\left\{\frac{ik}{2B}[A(x^2 + y^2) - 2(ux + vy)]\right\} dx dy. \quad (5.60)$$

Пусть далее $A = D = 1$, $C = 0$, $B = 2f$ (при этих значениях выражение (5.60) описывает поле на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы), $q = 2if/z_0$, $\gamma = z_0/(2f)$, $s = 1 + \gamma^2 + i\alpha$. Тогда после вычисления гауссовых интегралов в (5.60), получим окончательно:

$$E_2(u, v) = \frac{-i\gamma}{\sqrt{|s|}} \exp\left\{\frac{ik}{4f}(u^2 + v^2)\right\} \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{w_0^2 |s|^2} [(1 + \alpha^2 + \gamma^2)v^2]\right\} \times \exp\left\{-\frac{\gamma^2}{w_0^2 |s|^2} [(1 + \gamma^2)u^2 - 2i\gamma(1 + \gamma^2)uv]\right\} \times \cos\left\{\frac{\gamma^2 \alpha}{w_0^2 |s|^2} (u^2 - \gamma^2 v^2 - 2i\gamma uv) - \frac{1}{2} \arg s\right\}. \quad (5.61)$$

Комплексная амплитуда (5.61) описывает пучок с начальной амплитудой (5.58) на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы ($z = 2f$). Из (5.61) следует, что поле имеет изолированные нули на обеих декартовых осях, и что эти нули «сгущаются» при удалении от начала координат. Координаты этих нулей на декартовых осях находятся из уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \quad u = 0, \quad v_p &= \pm (\gamma Q)^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\arg s}{2} + \pi p \right), \\ 2) \quad v = 0, \quad u_p &= \pm (Q)^{-1} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\arg s}{2} + \pi p \right), \end{aligned} \quad (5.62)$$

где $p = 0, 1, 2, \dots$ и $Q^2 = (\alpha\gamma^2)/(w_0|s|)^2$. Из (5.61) также видно, что вокруг изолированных нулей (5.62) сформируются эллиптические оптические вихри $(u - i\gamma v)^2$ с топологическим зарядом -2 .

Интенсивность пучка (5.58) на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы будет равна:

$$I(u, v) = \frac{\gamma^2}{|s|} \exp \left\{ -\frac{\gamma^2}{w_0^2 |s|^2} (1 + \alpha^2 + \gamma^2) v^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{\gamma^2}{w_0^2 |s|^2} (1 + \gamma^2) u^2 \right\} \times \left[\cos^2 \left\{ Q^2 (u^2 - \gamma^2 v^2) - \frac{1}{2} \arg s \right\} + \sinh^2 (2Q^2 \gamma uv) \right]. \quad (5.63)$$

Из (5.63) видно, что интенсивность будет иметь вид вытянутого вдоль оси u прямоугольника с центром в начале координат, у которого из углов выходят световые лучи под углом β , тангенс которого равен:

$$\tan \beta = \frac{1 + \gamma^2}{1 + \gamma^2 + \alpha^2}. \quad (5.64)$$

Найдём ОУМ пучка (5.58). Для этого подставим (5.58) в (5.34) и (5.35), получим:

$$J_z = \left(\frac{\pi k w_0^4}{32 f} \right) \left[\frac{\operatorname{Re}(1 + i\alpha)^{1/2}}{(1 + \alpha^2)^{1/2}} - \frac{\operatorname{Re}(1 + i\alpha)^{3/2}}{(1 + \alpha^2)^{3/2}} \right], \quad (5.65)$$

$$W = \frac{\pi w_0^2}{4} \left[1 + \frac{\operatorname{Re}(1 + i\alpha)^{1/2}}{(1 + \alpha^2)^{1/2}} \right]. \quad (5.66)$$

Из (5.65) и (5.66) найдём ОУМ пучка (5.58), нормированный на его мощность:

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{\gamma}{2} \right) \left[\frac{(1 + \alpha^2) \operatorname{Re}(1 + i\alpha)^{1/2} - \operatorname{Re}(1 + i\alpha)^{3/2}}{(1 + \alpha^2)^{3/2} + (1 + \alpha^2) \operatorname{Re}(1 + i\alpha)^{1/2}} \right], \quad (5.67)$$

где Re – вещественная часть числа. Из (5.67) следует, что при большом квази-периоде косинуса в (5.58), когда $\alpha \rightarrow 0$, ОУМ пучка (5.58) стремится к нулю как $J_z/W \sim \alpha^2$. И, наоборот, при малом квази-периоде косинуса в (5.58), когда $\alpha \rightarrow \infty$, ОУМ также стремится к нулю, как $J_z/W \sim \alpha^{-1/2}$. Казалось бы, что при малом квази-периоде косинуса в сечении гауссова пучка будет попадать много оптических вихрей, которые должны дать большой вклад в ОУМ. Но в начальной плоскости у пучка (5.58) нет оптических вихрей и ТЗ равен нулю. При определённом значении α ОУМ (5.67) будет иметь небольшой положительный максимум.

На рис. 5.11 показаны распределения интенсивности и фазы пучка (5.58), (5.61) в начальной плоскости и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы. Распределения в начальной плоскости (рис. 5.11а, б) вычислены по формуле (5.58), а на расстоянии от неё – по формуле (5.61) (рис. 5.11в, г) и сравнивались с результатом численного преобразования Френеля, реализованного в виде свёртки с использованием быстрого преобразования Фурье. Использовались следующие параметры расчёта: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 1$ мм, масштабный множитель косинуса $\alpha = \pi$, фокусное расстояние $f = 1$ м, область расчёта $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 1,5$ мм (рис. 5.11а, б) и $R = 5$ мм (рис. 5.11в, г).

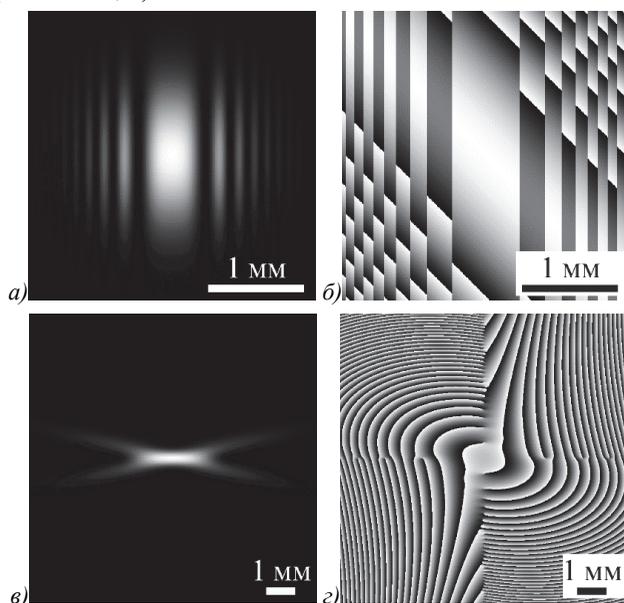


Рис. 5.11. Распределения интенсивности и фазы в начальной плоскости (а, б) вычислены по формуле (5.58), а на расстоянии от неё – по формуле (5.61) (в, г)

В данном разделе рассмотрены три примера мульти-вихревых гауссовых световых полей, у которых счётное число фазовых сингулярностей (винтовых дислокаций) и поэтому бесконечный топологический заряд. Первый пучок имеет амплитуду в виде гауссовой функции, умноженной на косинус с вихревым аргументом в квадрате. У такого пучка центры сингулярности фазы лежат на декартовых осях в плоскости перетяжки и «уплотняются» с увеличением расстояния от оптической оси. Распределение интенсивности у такого пучка имеет вид «четырёх-

конечной звезды». Все оптические вихри у такого пучка имеют одинаковый топологический заряд 2. Второй пучок, описывается также гауссовой функцией, умноженной на косинус в произвольной степени, и также от вихревого аргумента. Этот пучок имеет счётное число оптических вихрей, которые эквидистантно расположены на одной декартовой оси в плоскости перетяжки и топологический заряд каждого из них равен степени, в которую возводится косинус. Интенсивность такого пучка имеет вид двух световых пятен, центры которых находятся на прямой, перпендикулярной прямой, на которой лежат центры оптических вихрей. И третий пучок во многом похож на первый, но формируется с помощью наклонной цилиндрической линзы из косинусной одномерной решётки с квадратичным аргументом.

Глава 6. Управление топологическим зарядом и орбитальным угловым моментом

6.1 Топологический заряд суперпозиции двух пучков Бесселя-Гаусса

Лазерные вихревые пучки характеризуются двумя основными величинами: орбитальным угловым моментом и топологическим зарядом. Хотя работ по исследованию ОУМ вихревых пучков достаточно много (например, [3, 4, 7, 141, 142, 143, 144, 145, 146]), изучению ТЗ вихревых пучков уделяется мало внимания [16, 147, 148]. Современное состояние исследований по оптическим вихрям можно увидеть из обзора [127]. Изучение ТЗ оптических вихрей важно хотя бы потому, что при амплитудных и фазовых искажениях оптического вихря (ОВ), например, при распространении в турбулентной атмосфере, его ОУМ изменяется (как правило, уменьшается) непрерывно (малые искажения приводят к малым изменениям ОУМ, большие – к большим), а ТЗ при этом изменяется дискретно, так как ТЗ должен оставаться целой величиной. И нужны существенные искажения ОВ, чтобы ТЗ изменился на единицу. То есть ТЗ более устойчивая величина к искажениям ОВ, чем ОУМ. Еще одна особенность ТЗ заключается в том, что он не всегда сохраняется при распространении ОВ в свободном пространстве. В отличие от ОУМ оптических вихрей, который сохраняется при распространении. Известны работы, в которых показано, как меняется ТЗ некоторых ОВ [38, 62, 68, 94]. Например, оптический вихрь с начальным дробным ТЗ при распространении в свободном пространстве имеет всегда целый ТЗ. Хотя, как показано в [62, 68], этот целый ТЗ может изменяться на единицу в зоне дифракции Френеля и в дальней зоне дифракции.

Среди всех дробных ТЗ полуцелый ТЗ стоит особняком. В [94] показано, что ТЗ дробных вихрей при распространении целый. Но полуцелые вихри выделяются среди других дробных, так как для ТЗ $(2n+1)/2$ так и не ясно из [94], какой будет у него ТЗ при распространении: $(n+1)$ или n . Орбитальный угловой момент ОВ с начальным полуцелым ТЗ равен этому полуцелому ТЗ [15, 22] и остаётся таким при распространении. Но сохраняется ли полуцелый ТЗ при распространении, не было известно. Например, в работе [112] рассматривалась суперпозиция $r \exp(-r^2)(\exp(-i\varphi)-1)$ двух пучков (смесь винтовой и краевой дислокаций), у которой ТЗ равен $-1/2$. Но из-за того, что второе слагаемое не является модой и в дальней зоне на оптической оси нет нуля интенсивности, в дальней зоне ТЗ суперпозиции равен -1 . Полуцелые вихри рассматривались также в [69], они названы Гамма-Гауссовыми

пучками. Но явно они описаны только в начальной плоскости. Как изменяется ТЗ таких пучков при распространении, в [69] не рассматривалось. Также в [69] рассматриваются моды с полущелым ТЗ в волноводах с двулучепреломлением.

В данном разделе мы теоретически рассмотрим ТЗ линейной соосной комбинации двух пучков Бесселя-Гаусса (БГ) с разными амплитудами, разными ТЗ и разными масштабными факторами (разными радиальными проекциями волновых векторов). И покажем, что ТЗ сохраняется при распространении и равен ТЗ того пучка БГ, у которого больше масштабный фактор. Также мы показали, что у оптического вихря может быть полущелый ТЗ на любом расстоянии от начальной плоскости, и он сохраняется при распространении пучка, но при этом дробная часть ТЗ «скрыта» на бесконечности. В [69] аналогичный эффект называют «скрытой фазой».

6.1.1 Расчет топологического заряда суммы двух пучков БГ

Пучок Бесселя-Гаусса в любой поперечной плоскости на расстоянии z имеет комплексную амплитуду вида [10]:

$$E(r, \varphi, z) = \frac{E_0}{q(z)} J_n \left(\frac{\alpha r}{q(z)} \right) \times \exp \left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{w^2 q(z)} + i\varphi \right), \quad (6.1)$$

где (r, φ, z) – цилиндрические координаты, E_0 – положительная постоянная, $J_n(x)$ – функция Бесселя, α – масштабный параметр, k – волновое число, w – радиус перетяжки гауссова пучка, n – топологический заряд оптического вихря, $q(z) = 1 + iz/z_0$, $z_0 = kw^2/2$ – длина Рэлея. Рассмотрим суперпозицию двух соосных пучков Бесселя-Гаусса с разными топологическими зарядами и разными масштабными параметрами:

$$E_1(r, \varphi, z) = \frac{E_0}{q(z)} J_n \left(\frac{\alpha r}{q(z)} \right) \times \exp \left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{w^2 q(z)} + i\varphi \right) + \frac{E_1}{q(z)} J_m \left(\frac{\beta r}{q(z)} \right) \times \exp \left(ikz - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{w^2 q(z)} + i\varphi \right). \quad (6.2)$$

Найдём ТЗ такой суперпозиции пучков (6.2) для любого z . Для этого воспользуемся известной формулой для расчета ТЗ [15]:

$$TC = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \quad (6.3)$$

Подставим (6.2) в (6.3), получим:

$$\begin{aligned}
TC = & \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left[E_0 n \exp\left(in\varphi - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)}\right) J_n\left(\frac{\alpha r}{q(z)}\right) + \right. \\
& + E_1 m \exp\left(im\varphi - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)}\right) J_m\left(\frac{\beta r}{q(z)}\right) \left. \right] \left[E_0 \exp\left(in\varphi - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)}\right) J_n\left(\frac{\alpha r}{q(z)}\right) + \right. \\
& + E_1 \exp\left(im\varphi - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)}\right) J_m\left(\frac{\beta r}{q(z)}\right) \left. \right]^{-1} d\varphi.
\end{aligned} \quad (6.4)$$

В пределе при $r \rightarrow \infty$ заменим функции Бесселя в (6.4) на их асимптотики:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (6.5)$$

И так как аргумент функции Бесселя в (6.4) комплексный, то вместо (6.5) получим:

$$J_n\left(\frac{\alpha r}{q(z)}\right) \approx \sqrt{\frac{q(z)}{2\pi\alpha r}} \exp\left(\frac{\alpha r z}{z_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)} - \frac{in\pi}{2} - \frac{i\pi}{4}\right). \quad (6.6)$$

В (6.6) при представлении косинуса из (6.5) как суммы двух экспонент, вторая экспонента стремится к нулю в пределе $r \rightarrow \infty$. Заменим в (6.4) функции Бесселя экспонентами (6.6), получим:

$$\begin{aligned}
TC = & \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left[\frac{E_0 n (-i)^n}{\sqrt{\alpha}} \exp\left(in\varphi - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} + \frac{\alpha r z}{z_0 |q(z)|^2}\right) + \right. \\
& \frac{E_1 m (-i)^m}{\sqrt{\beta}} \exp\left(im\varphi - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)} + \frac{\beta r z}{z_0 |q(z)|^2}\right) \left. \right] \times \\
& \left[\frac{E_0 (-i)^n}{\sqrt{\alpha}} \exp\left(in\varphi - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} + \frac{\alpha r z}{z_0 |q(z)|^2}\right) + \right. \\
& \left. \frac{E_1 (-i)^m}{\sqrt{\beta}} \exp\left(im\varphi - \frac{i\beta^2 z}{2kq(z)} + \frac{\beta r z}{z_0 |q(z)|^2}\right) \right]^{-1} d\varphi.
\end{aligned} \quad (6.7)$$

Поделив числитель и знаменатель в (6.7) на третью экспоненту в первом слагаемом, получим вместо (6.7):

$$\begin{aligned}
TC &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \left[\frac{E_0 n (-i)^n}{\sqrt{\alpha}} \exp \left(i n \varphi - \frac{i \alpha^2 z}{2kq(z)} \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{E_1 m (-i)^m}{\sqrt{\beta}} \exp \left(i m \varphi - \frac{i \beta^2 z}{2kq(z)} + \frac{(\beta - \alpha) r z}{z_0 |q(z)|^2} \right) \right] \times \\
&\times \left[\frac{E_0 (-i)^n}{\sqrt{\alpha}} \exp \left(i n \varphi - \frac{i \alpha^2 z}{2kq(z)} \right) + \frac{E_1 (-i)^m}{\sqrt{\beta}} \exp \left(i m \varphi - \frac{i \beta^2 z}{2kq(z)} + \frac{(\beta - \alpha) r z}{z_0 |q(z)|^2} \right) \right]^{-1} d\varphi.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Из (6.8) следует, что если $\alpha > \beta$, то в числителе и знаменателе (6.8) останутся при $r \rightarrow \infty$ только первые слагаемые, которые после сокращения подобных сомножителей дадут $TC = n$. И наоборот, если $\alpha < \beta$, то в числителе и знаменателе (6.8) останутся при $r \rightarrow \infty$ только вторые слагаемые, которые после сокращения подобных сомножителей дадут $TC = m$. То есть, какой ТЗ будет у суперпозиции двух пучков Бесселя-Гаусса, зависит от «конкуренции» масштабных коэффициентов α и β у функции Бесселя, независимо от амплитуды (E_0, E_1) каждого пучка. Особый случай возникает, когда $\alpha = \beta$. Тогда вместо (6.8) можно записать:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{E_0 n (-i)^n e^{i n \varphi} + E_1 m (-i)^m e^{i m \varphi}}{E_0 (-i)^n e^{i n \varphi} + E_1 (-i)^m e^{i m \varphi}}. \tag{6.9}$$

В [43] показано, что ТЗ выражения (6.9) равен $TC = n$, если $E_0 > E_1$, и равен $TC = m$, если $E_0 < E_1$. Если $E_0 = E_1$, то из (6.9) следует, что $TC = (n+m)/2$. Действительно, если $E_0 = E_1$ и $\alpha = \beta$, то суперпозиция двух пучков БГ (6.1) при больших r будет иметь амплитуду вида:

$$\begin{aligned}
E_2(r \rightarrow \infty, \varphi, z) &\approx E_0 \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha r q(z)}} \exp \left(i k z - \frac{i \alpha^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{w^2 q(z)} \right) \times \\
&\times \exp \left(\frac{i \alpha r}{|q(z)|^2} + \frac{\alpha r z}{z_0 |q(z)|^2} - \frac{i \pi}{4} \right) \exp \left[\frac{i(n+m)}{2} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \times \\
&\times \cos \left[\frac{(n-m)}{2} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Из (6.10) видно, что получается оптический вихрь с $TC = (n+m)/2$ и числом лепестков в распределении интенсивности, равным $|n-m|$. Заметим, что и нормированный на мощность пучка орбитальный угловой момент у линейной комбинации двух одинаковых оптических вихрей с разным топологическим зарядом равен топологическому заряду суммы

двух пучков $(n+m)/2$. Если n и m – чётное и нечётное (или наоборот) целые числа, то ТЗ линейной комбинации (6.10) будет полуцелым числом, хотя число лепестков распределения интенсивности будет целым. Пусть $m < n$, тогда у поля (6.2) $\alpha = \beta$ и $E_0 = E_1$ на оптической оси останется изолированный ноль интенсивности m -го порядка (оптический вихрь с $ТС = m$) и на бесконечности остаются $n - m$ вихрей с $ТС = (n - m)/2$. Поэтому ТЗ (6.10) будет равен $ТС = (n + m)/2$. Таким образом, у оптического вихря может быть полуцелый ТЗ при любом z , но при этом дробная часть ТЗ «скрыта» на бесконечности. В [69] аналогичный эффект называют «скрытой фазой». Для случая (6.10) лучи нулевой интенсивности расходятся от центра (от оптической оси, $r = 0$) до бесконечности вдоль радиусов, для которых полярный угол равен

$$\varphi_p = \left(\frac{4p + |m - n| + 2}{2|m - n|} \right) \pi, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.11)$$

На лучах, исходящих из центра по радиусу под углами $\varphi = \varphi_p + \pi$, лежат максимумы интенсивности $|n - m|$ лепестков. Заметим, что при сложении двух любых одинаковых оптических вихрей, но с разными топологическими зарядами, возникает такая картина интенсивности в виде «ромашки» [149]. Функция фазы поля (6.10) от полярного угла является периодической функцией с разрывом, равным π , если $m + n$ – нечётное число. Но комплексная амплитуда (6.10) будет непрерывная. И при разложении в ряд Фурье по угловым гармоникам функции (6.10) получится только два слагаемых (две угловых гармоники): $\exp(im\varphi)$ и $\exp(in\varphi)$.

Понятно, что доказательство, аналогичное (6.8) для суммы двух пучков БГ, можно провести для линейной комбинации из любого конечного числа пучков. При этом ТЗ у всей суперпозиции будет равен ТЗ того пучка из суперпозиции, у которого масштабный коэффициент больше. Поэтому ТЗ суперпозиции

$$E_2(r, \varphi, z) = \sum_{n=-N}^N \frac{E_n}{q(z)} J_n(\alpha_n r) \times \exp\left(ikz - \frac{i\alpha_n^2 z}{2kq(z)} - \frac{r^2}{w^2 q(z)} + in\varphi \right) \quad (6.12)$$

будет равен $ТС = m$, если $\alpha_m = \max(\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha_N)$.

6.1.2 Топологический заряд суперпозиции двух пучков Бесселя-Гаусса с одинаковыми весовыми и масштабными коэффициентами

Пусть имеется суперпозиция двух пучков Бесселя-Гаусса с одинаковыми весовыми и масштабными коэффициентами (весовые будем считать равными единице):

$$E(r, \varphi, z) = \frac{1}{q} \exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{qw_0^2}\right) \times \left[J_m\left(\frac{\alpha r}{q}\right) \exp(im\varphi) + J_n\left(\frac{\alpha r}{q}\right) \exp(in\varphi) \right]. \quad (6.13)$$

В начальной плоскости ($z=0$) ТЗ пучка (6.13) неопределенный (не существует), так как $q=1$, аргумент функции Бесселя в (6.13) вещественный и поэтому при $r=\gamma_{m,p}/\alpha$ ($\gamma_{m,p}$ – p -й ноль функции Бесселя m -го порядка) ТЗ (6.13) равен n , а при $r=\gamma_{n,p}/\alpha$ ТЗ (6.13) равен m . И так как нулей (корней) функции Бесселя счетное число, такое чередование ТЗ (то n , то m) будет и при r , стремящимся к бесконечности. При распространении пучка (6.13) в пространстве аргумент функций Бесселя становится комплексным, и нулевых значений у них нет.

Найдём ТЗ суперпозиции (6.13) при $z > 0$, рассчитав его на окружности радиуса r . Для определённости положим, что $n > m$ (случай $n = m$ тривиален). Подставим (6.13) в (6.3), получим:

$$TC(r) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{mJ_m\left(\frac{\alpha r}{q}\right) + nJ_n\left(\frac{\alpha r}{q}\right) e^{i(n-m)\varphi}}{J_m\left(\frac{\alpha r}{q}\right) + J_n\left(\frac{\alpha r}{q}\right) e^{i(n-m)\varphi}} d\varphi. \quad (6.14)$$

Заменив φ на $\varphi/(n-m)$, получим этот же интеграл, но с экспонентами $e^{i\varphi}$. Заменив $e^{i\varphi}$ на комплексную переменную Z , получим:

$$TC(r) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \oint_{|z|=1} \frac{mJ_m\left(\frac{\alpha r}{q}\right) + nJ_n\left(\frac{\alpha r}{q}\right) Z}{J_m\left(\frac{\alpha r}{q}\right) + J_n\left(\frac{\alpha r}{q}\right) Z} \frac{dZ}{Z}. \quad (6.15)$$

Интеграл (6.15) вычисляется с помощью теоремы о вычетах. Число полюсов внутри окружности единичного радиуса зависит от соотношения $J_m(\alpha r/q)/J_n(\alpha r/q)$. Используя асимптотики функции Бесселя (6.5) и (6.6), получим, что отношение двух функций Бесселя разного порядка равно примерно

$$J_n\left(\frac{\alpha r}{q}\right) / J_m\left(\frac{\alpha r}{q}\right) \sim (-i)^{n-m}. \quad (6.16)$$

Тогда, по определению Берри (6.3) ТЗ равен

$$TC = \lim_{r \rightarrow \infty} TC(r) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \oint_{|z|=1} \frac{m+n(-i)^{n-m} Z}{1+(-i)^{n-m} Z} \frac{dZ}{Z}. \quad (6.17)$$

У подынтегрального выражения в (6.17) два полюса: $Z=0$ и $Z=-i^{n-m}$. Первый полюс лежит внутри единичной окружности, а второй – на ней. Поэтому вычет во втором полюсе делится на два и ТЗ (6.13) равен

$$TC = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[2\pi i \operatorname{Res} \left\{ \frac{m+n(-i)^{n-m} Z}{1+(-i)^{n-m} Z} \frac{1}{Z}, Z=0 \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{Res} \left\{ \frac{m+n(-i)^{n-m} Z}{1+(-i)^{n-m} Z} \frac{1}{Z}, Z=-i^{n-m} \right\} \right] \right] = m + \frac{n-m}{2} = \frac{n+m}{2}. \quad (6.18)$$

На практике, однако, ТЗ вычисляется по окружности конечного радиуса. И численно установлено, что даже при очень большом радиусе соотношение (6.16) даёт число, по модулю близкое к единице, но меньшее её (при $n > m$) (рис.6.1). Из-за этого в интеграле (6.17) остаётся только один полюс $z=0$ и численный расчёт ТЗ даёт значение m , то есть меньший из двух ТЗ.

Таким образом, в данном подразделе мы показали, что полуцелый ТЗ для суперпозиции двух пучков Бесселя с равными масштабными и весовыми коэффициентами (6.13) получается только при расчете его по окружности бесконечно-большого радиуса. При расчете ТЗ (6.13) по окружности конечного радиуса, ТЗ будет равен меньшему из двух чисел n или m .

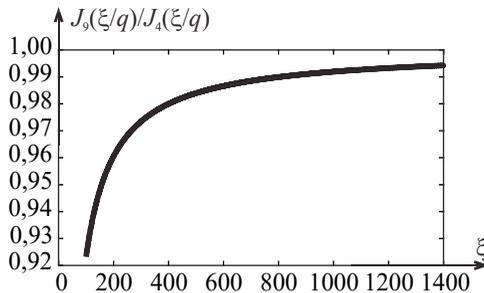


Рис.6.1. Модуль соотношения $J_0(\xi/q)/J_4(\xi/q)$ при $q = 1 + i/4$, $100 \leq \xi \leq 1400$

Покажем далее, что в дальней зоне ТЗ будет равен меньшему из чисел $m < n$. Действительно, рассмотрим сумму двух пучков БГ (6.13) в дальней зоне:

$$E(r, \varphi, z \gg z_0) = \frac{-iz_0}{z} \exp\left(ikz - \frac{\alpha^2 z_0}{2k} + \frac{ikr^2}{2z}\right) \times \left[E_0(-i)^n I_n\left(\frac{\alpha r z_0}{z}\right) \exp(in\varphi) + E_1(-i)^m I_m\left(\frac{\alpha r z_0}{z}\right) \exp(im\varphi) \right], \quad (6.19)$$

где $I_n(y)$ – модифицированная функция Бесселя:

$$I_n(y) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!(n+p)!} \left(\frac{y}{2}\right)^{n+2p}. \quad (6.20)$$

Тогда в дальней зоне вместо (6.15) для расчета ТЗ пучка (6.19) можно записать выражение:

$$TC(r) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \oint_{|\zeta|=1} \frac{nE_0(-i)^n I_n(\gamma r) + mE_1(-i)^m I_m(\gamma r) Z}{E_0(-i)^n I_n(\gamma r) + E_1(-i)^m I_m(\gamma r) Z} \frac{dZ}{Z}, \quad (6.21)$$

где $\gamma = k\alpha z_0^2/(2z)$. Преобразуем (6.21) к виду, аналогичному (6.17), получим:

$$TC(\rho) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \oint_{|\zeta|=1} \frac{m+n(-i)^{n-m} \frac{E_0}{E_1} \frac{I_n(\gamma\rho)}{I_m(\gamma\rho)} \frac{Z}{Z}}{1+(-i)^{n-m} \frac{E_0}{E_1} \frac{I_n(\gamma\rho)}{I_m(\gamma\rho)} \frac{Z}{Z}} dZ. \quad (6.22)$$

Если $E_0 = E_1$, то отношение двух модифицированных функций Бесселя $I_n(\gamma\rho)I_m^{-1}(\gamma\rho)$ в (6.22), как следует из (6.20), будет меньше единицы, если $n > m$. То есть, второй полюс в (6.22) будет находиться вне окружности единичного радиуса, а вычет в нуле в (6.22) даст значение ТЗ, равное меньшему номеру $m < n$. Такой вывод подтверждается и с помощью численного моделирования. Если $E_0 < E_1$, то, по-прежнему, в (6.22) будет только один полюс и значит ТЗ будет равен $m (< n)$. Но, как показано раньше, в этом случае ($E_0 < E_1$) ТЗ равен m не только в дальней зоне, но при любом z . Если, наоборот, $E_0 > E_1$, то отношение из (6.22) будет зависеть от расстояния z : $E_0 E_1^{-1} I_n(\gamma\rho) I_m^{-1}(\gamma\rho) \approx E_0 E_1^{-1} (z_0/z)^{n-m}$, и при $z > z_0 (E_0 E_1^{-1})^{1/(n-m)}$ это отношение станет меньше 1. И в (6.22) будет только один полюс в нуле. То есть, если пучок БГ с большим номером n имеет вестовой коэффициент немного больший, чем весовой коэффициент пучка БГ с меньшим номером m ($E_0 > E_1$), то ТЗ всего пучка (6.19) не будет сохраняться при распространении. При небольших z ТЗ будет равен n , а при больших z ТЗ будет равен m . Этот вывод будет подтвержден с помощью моделирования.

6.1.3 Моделирование

Расчёт комплексной амплитуды суперпозиции двух пучков БГ осуществлялся по формуле (6.2), а расчёт ТЗ – по формуле (6.3). Использовались следующие параметры расчёта: длина волны $\lambda = 1,55$ мкм, радиус перетяжки гауссова пучка $w = 1$ мм, ТЗ первого пучка $n = 0$, ТЗ второго пучка $m = 1$, расстояния распространения $z = z_0/10$ (ближняя зона, $z_0 = 2,027$ м), $z = z_0$ (расстояние Рэлея) и $z = 5z_0$ (дальняя зона). Интенсивность и фаза рассчитывались в области $-R \leq x, y \leq R$ ($R = 2$ мм для $z = z_0/10$, $R = 10$ мм для $z = z_0$ и $R = 25$ мм для $z = 5z_0$), число отсчётов $N = 1024 \times 1024$, радиус окружности для расчёта ТЗ $R_1 = 2R$, число отсчётов на окружности $N_1 = 10^7$.

На рис. 6.2 показана интенсивность и фаза суперпозиции двух пучков БГ. Первый пучок БГ шире, его масштабный параметр меньше $\alpha = 0,001k$, чем у второго пучка $\beta = 0,002k$. Амплитуда пучков в суперпозиции одинаковая ($E_0 = E_1 = 1$). Из рис. 6.2г видно, что есть три вне осевых вихря, но два из них противоположного знака, а из рис. 6.2д, е видно, что есть один вне осевой вихрь (в нижней части картины). Поэтому, как и предсказывает теория, ТЗ должен быть равен 1. Численный расчёт по формуле (6.3) дает единицу до четвертого знака ($TC = 1,0000$) во всех трёх случаях.

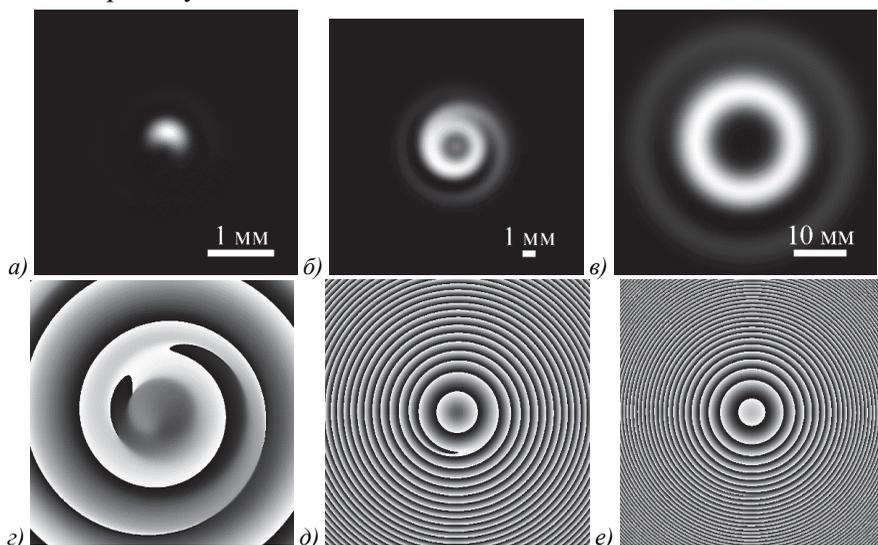


Рис. 6.2. Распределение интенсивности (а, б, в) и фазы (г, д, е) (белый цвет – 0, черный – 2π) для суперпозиции двух пучков БГ с ТЗ $n = 0$, $m = 1$, с одинаковой амплитудой ($E_0 = E_1 = 1$), но разными масштабирующими коэффициентами $\alpha = 0,001k$ и $\beta = 0,002k$, на расстояниях $z = z_0/10$ (а, г), $z = z_0$ (б, д) и $z = 5z_0$ (в, е)

На рис. 6.3 показаны интенсивность и фаза суперпозиции тех же двух пучков БГ, но, наоборот, первый пучок БГ уже ($\alpha = 0,002k$), чем второй ($\beta = 0,001k$), а веса, по-прежнему одинаковые ($E_0 = E_1 = 1$). Из рис. 6.3б видно, что спираль интенсивности изменила направление своего закручивания на противоположенное по сравнению с рис. 6.2б. На распределении фазы в ближней зоне (рис. 6.3г) имеется две пары вихрей противоположных знаков, а на распределениях фазы в зоне Френеля и дальней зоне (рис. 6.3д, е) по сравнению с рис. 6.2д,е имеется два оптических вихря – один осевой вихрь с ТЗ +1 и один вне осевой вихрь с ТЗ –1. Поэтому суммарный ТЗ должен быть равен нулю, как и предсказывает теория. Численно рассчитанный ТЗ дает очень малые значения: на рис. 6.3а, г $TC = -0,000000022700 \approx 0$, на рис. 6.3б, д $TC = 2,0680e-32 \approx 0$, и на рис. 6.3в, е $TC = -3,0812e-29 \approx 0$.

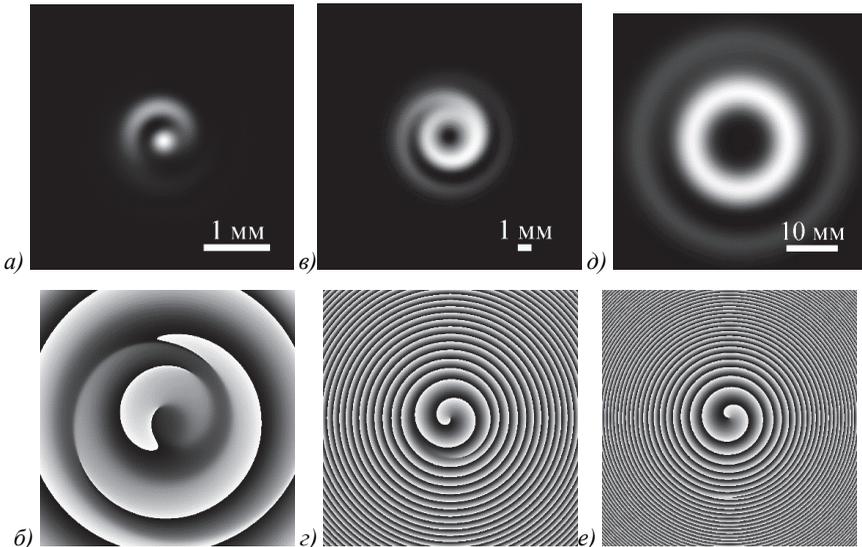


Рис. 6.3. Распределение интенсивности (а, б, в) и фазы (г, д, е) (белый цвет – 0, черный – 2π) для суперпозиции двух пучков БГ с ТЗ $n = 0$, $m = 1$, с одинаковой амплитудой ($E_0 = E_1 = 1$), но разными масштабирующими коэффициентами $\alpha = 0,002k$ и $\beta = 0,001k$, на расстояниях $z = z_0/10$ (а, г), $z = z_0$ (б, д) и $z = 5z_0$ (в, е)

Из сравнения рис. 6.2в, е и рис. 6.3в, е видны интересные особенности таких пучков. Видно, что распределения интенсивности в дальней зоне в обоих случаях почти одинаковые и имеют вид кольца, хотя фазовое распределение внутри кольца разное. На рис. 6.2е фаза внутри кольца без вихря (параболическая), хотя ТЗ пучка равен 1, а на рис. 6.3е фаза внутри кольца вихревая, хотя ТЗ пучка равен нулю.

На рис. 6.4 показаны интенсивность и фаза двух пучков БГ, у которых ширина одинаковая ($\alpha = \beta = 0,001k$), а амплитуды (веса) разные: вес первого пучка больше ($E_0 = 2, E_1 = 1$). Как и предсказывает теория, пучок БГ с большим весом доминирует в суперпозиции. И так как ТЗ первого пучка равен нулю, то у суперпозиции распределение интенсивности в дальней зоне в виде кольца, а фаза безвихревая. Численный расчет дает очень малое значение ТЗ для всех трёх расстояний (на рис. 6.4а, з ТЗ = 0,0000000046873 ≈ 0 , на рис. 6.4б, д ТЗ = 0,0000000059396 ≈ 0 и на рис. 6.4в, е ТЗ = 0,0000000058414 ≈ 0).

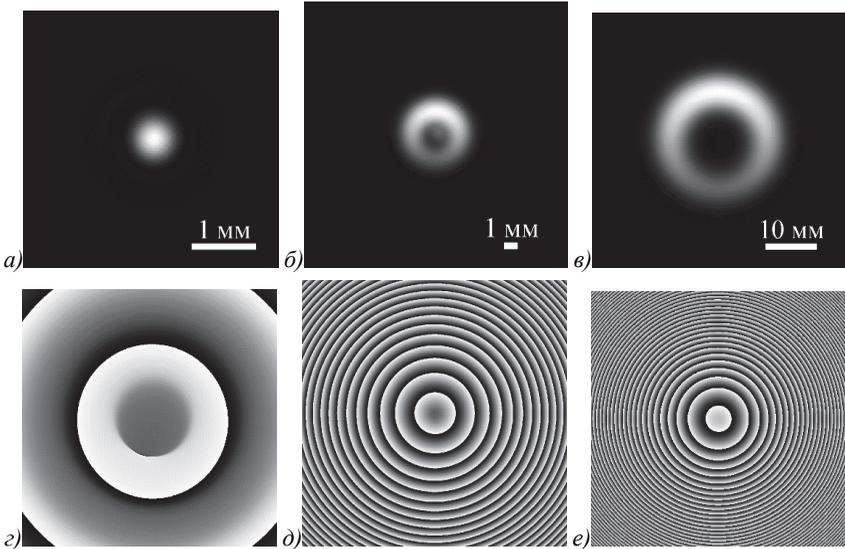


Рис. 6.4. Распределение интенсивности (а, б, в) и фазы (з, д, е) (белый цвет – 0, черный – 2π) для суперпозиции двух пучков БГ с ТЗ $n = 0, m = 1$, с одинаковыми масштабирующими коэффициентами $\alpha = \beta = 0,001k$, но разными амплитудами ($E_0 = 2, E_1 = 1$), на расстояниях $z = z_0/10$ (а, з), $z = z_0$ (б, д) и $z = 5z_0$ (в, е)

На рис. 6.5 показаны интенсивность и фаза суперпозиции тех же двух пучков БГ с одинаковой шириной ($\alpha = \beta = 0,001k$), но теперь вес второго пучка больше, чем у первого ($E_0 = 1, E_1 = 2$). Из рис. 6.5а, б, в видно, что распределение интенсивности есть неравномерное кольцо с нулем на оси. Второй пучок (вихревой с $m = 1$) доминирует в суперпозиции и на всех трёх распределениях фазы (рис. 6.5з, д, е) имеется только один вихрь на оптической оси. Поэтому, как предсказывает теория, ТЗ всей суперпозиции должен быть равен ТЗ второго пучка (ТЗ = 1). Численный расчет по фазе на рис. 6.5з, д, е дает во всех трёх случаях единичное значение ТЗ до четвёртого знака ТЗ = 1,0000.

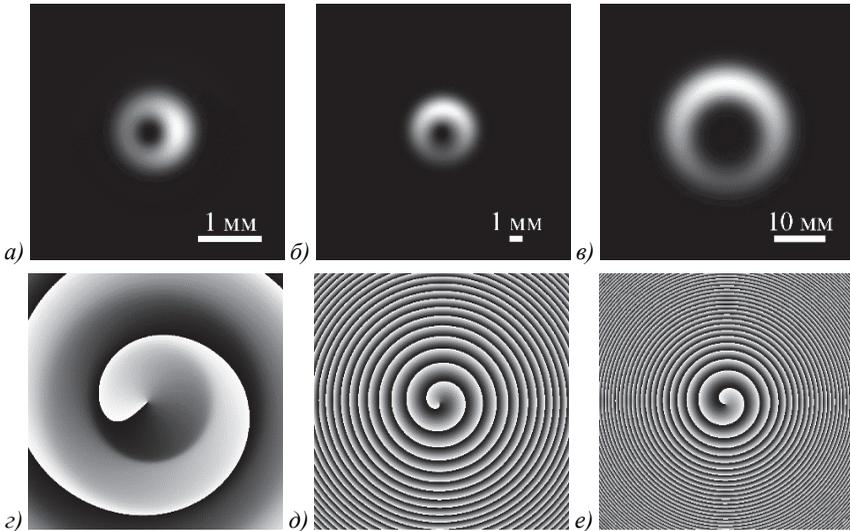


Рис. 6.5. Распределение интенсивности (а, б, в) и фазы (з, д, е) (белый цвет – 0, черный – 2π) для суперпозиции двух пучков БГ с ТЗ $n = 0$, $m = 1$, с одинаковыми масштабирующими коэффициентами $\alpha = \beta = 0,001k$, но разными амплитудами ($E_0 = 1$, $E_1 = 2$), на расстояниях $z = z_0/10$ (а, з), $z = z_0$ (б, д) и $z = 5z_0$ (в, е)

На рис. 6.6 показаны интенсивность и фаза суперпозиции двух тех же пучков БГ, но и ширины, и амплитуды (веса) у обоих пучков БГ одинаковы ($\alpha = \beta = 0,001k$, $E_0 = E_1 = 1$). Теория предсказывает (6.9), что в этом случае у суперпозиции должен быть полуцелый ТЗ, в данном случае $TC = 1/2$. Но при расчете ТЗ по окружности конечного радиуса, как предсказывает теория (6.18), ТЗ должен быть равен меньшему из двух чисел n и m . В нашем случае ТЗ должен быть равен нулю.

Из рис. 6.6а видно, что в ближней зоне доминирует первый пучок (с нулевым ТЗ), а из рис. 6.6г, е видно, что интенсивность имеет вид разорванного кольца. На рис. 6.6б кажется, что ТЗ в ближней зоне равен 1 (три вихря порядка +1 и два вихря порядка -1), но если взять область шире ($R = 15$ мм, рис. 6.6в), то видно, что при удалении от центра линии постоянной фазы имеют вид разомкнутых окружностей. На луче, идущем от центра картины вертикально вниз, интенсивность равна нулю. На этом луче нулевой интенсивности ($\varphi = 3\pi/2$) видны скачки фазы (рис. 6.6в). Но каждый вихрь порядка +1 компенсируется вихрем порядка -1, и при точном равенстве нулю весов ($E_0 = 1$, $E_1 = 1$) численный расчет дает нулевое значение ТЗ ($TC = 0$). В зоне Френеля и в дальней зоне разрывы в разомкнутых кольцах постоянной фазы устраняются и оптические вихри пропадают, поэтому в этих плоскостях ТЗ получился

также примерно равным нулю: $T\mathcal{C} = 0,000000049984$ (рис. 6.6д) и $T\mathcal{C} = 0,000000049827$ (рис. 6.6ж).

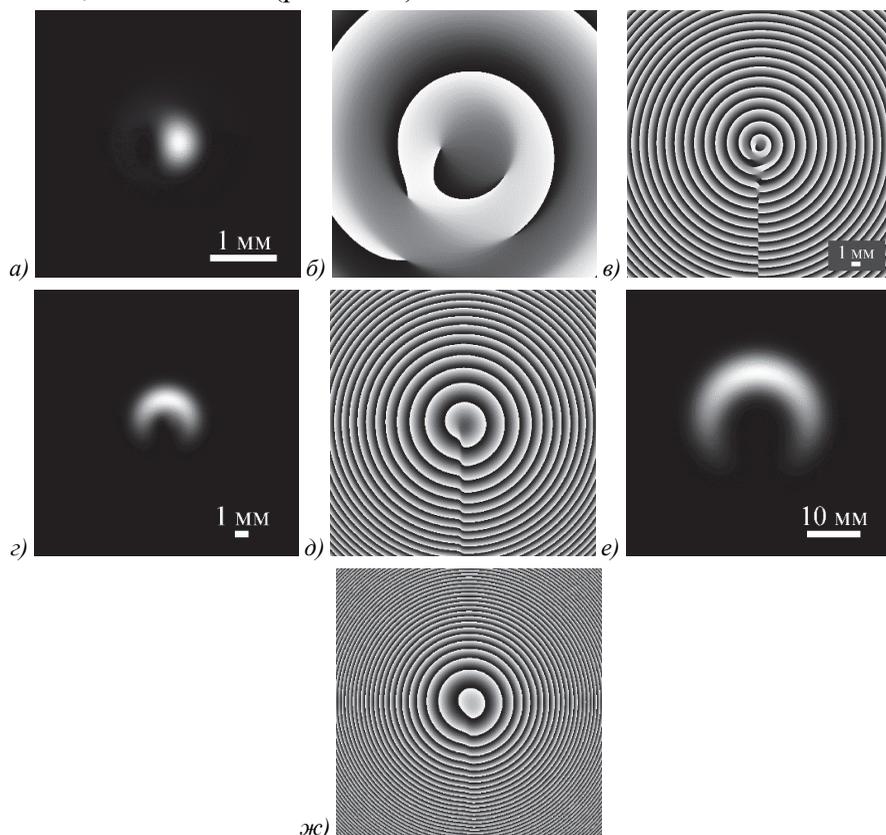


Рис. 6.6. Распределение интенсивности (а, г, е) и фазы (б, в, д, ж) (белый цвет – 0, черный – 2π) для суперпозиции двух пучков БГ с $T\mathcal{C} n = 0$, $m = 1$, с одинаковыми масштабирующими коэффициентами $\alpha = \beta = 0,001k$ и одинаковыми амплитудами ($E_0 = E_1 = 1$), на расстояниях $z = z_0/10$ (а–в), $z = z_0$ (г, д) и $z = 5z_0$ (е, ж) (на рис. б и в показана одна и та же фаза, но в областях разного размера)

На рис. 6.6в видно, что фаза имеет вид «разорванных» спиралей, которые показывают, что в пучке присутствует «смесь винтовой и краевой дислокаций», которая присуща полувещам оптическим вихрям [112]. Также на рис. 6.6е видно, что интенсивность пучка с $T\mathcal{C} = 1/2$ имеет вид подковы или разомкнутого круга [69]. На рис. 6.6ж видно, что вихрей нет, а единственный вихрь с $m = 1$ «скрылся» на бесконечности. И поскольку этот вихрь лежит на окружности «бесконечного» радиуса, то он дает вклад в $T\mathcal{C}$ только половину.

6.1.4 Моделирование в случае примерного равенства весовых коэффициентов

При моделировании расчет ТЗ осуществляется по окружности конечного радиуса. Это приводит к ряду особенностей, которые были рассмотрены в предыдущем разделе. В этом разделе рассмотрим, как влияет на величину ТЗ небольшое отклонение от равенства двух весовых коэффициентов у суперпозиции двух пучков БГ с одинаковым масштабom. Численный расчет показал, что переход от целого ТЗ к полужелому происходит не мгновенно скачком, а плавно (рис. 6.7).

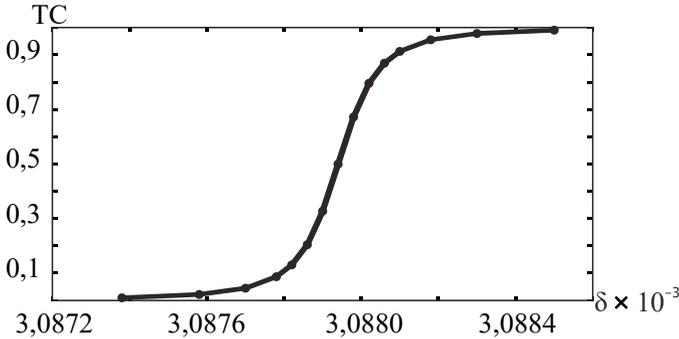


Рис. 6.7. Зависимость ТЗ от разницы весовых коэффициентов δ в суперпозиции двух пучков БГ с ТЗ $n = 0$, $t = 1$, с одинаковыми масштабирующими коэффициентами $\alpha = \beta = 0,001k$ и почти одинаковыми амплитудами ($E_0 = 1$, $E_1 = 1 + \delta$, $\delta \ll 1$) на расстоянии $z = z_0$

Полученное значение ТЗ на рис. 6.8 составляет 1,0000 ($z = 0,1z_0$, $z = 0,9z_0$, $z = 0,95z_0$), 0,63782 ($z = 0,99999z_0$), 0,49967 ($z = z_0$), 0,36111 ($z = 1,00001z_0$), 0,00000017636 ($z = 1,05z_0$), 0,000000081473 ($z = 1,1z_0$), 0,000000050365 ($z = 5,0z_0$). Согласно вычисленным значениям ТЗ, он спадает: при $z < z_0$ он равен 1, при приближении к z_0 начинает быстро спадать и при $z > z_0$ ТЗ становится равен нулю (рис. 6.9). В зоне перехода ТЗ дробный. Сама зона перехода примерно равна $\Delta z \approx 0,0001z_0 \approx 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ мкм} \approx 200 \text{ мкм}$ ($z_0 \approx 2 \text{ м}$). Согласно расчётам, расстояние, где происходит плавный переход от 1 к 0, возрастает с увеличением весового коэффициента второго пучка БГ. Это объясняет, почему на рис. 6.7 ТЗ оказался равен нулю: при одинаковых коэффициентах $E_0 = E_1 = 1$ спад ТЗ произошёл на малом расстоянии $z \approx 0$. Это также подтверждается рассуждениями по поводу выражения (6.22).

На рис. 6.8 показаны распределения фаз суперпозиции пучков БГ при $E_1 = 1,00308794$ ($E_0 = 1$) в разных поперечных плоскостях.

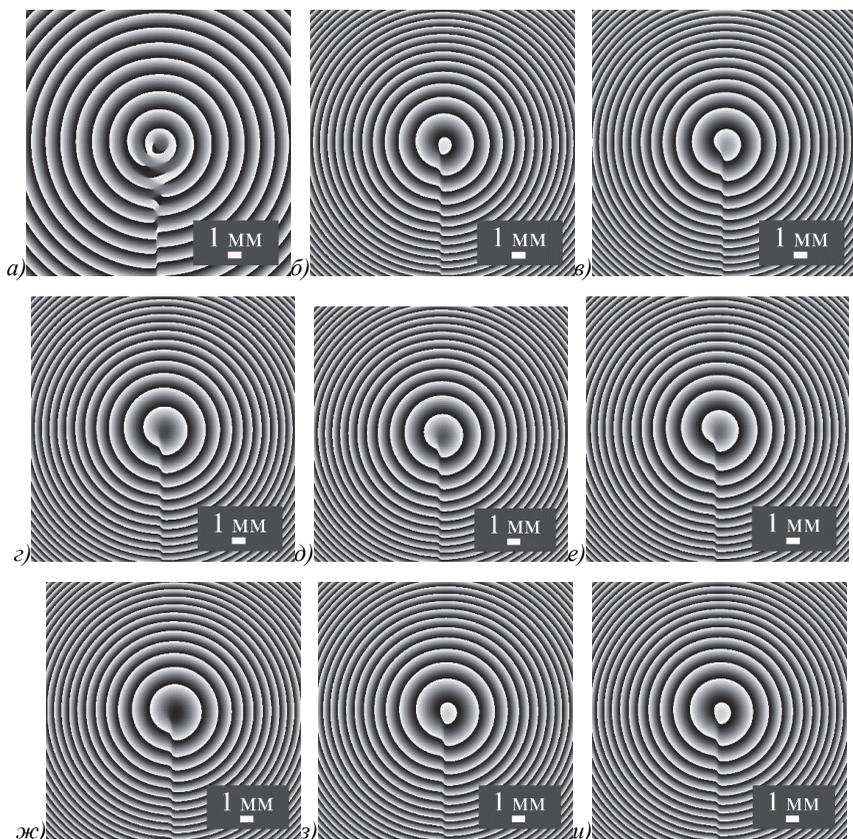


Рис. 6.8. Распределения фаз суперпозиции пучков БГ при $E_1 = 1,00308794$ ($TC \approx 0,5$ при $z = z_0$) в плоскостях $z = 0,1z_0$ (а), $z = 0,9z_0$ (б), $z = 0,95z_0$ (в), $z = 0,99999z_0$ (г), $z = z_0$ (д), $z = 1,00001z_0$ (е), $z = 1,05z_0$ (ж), $z = 1,1z_0$ (з), $z = 5,0z_0$ (и). Расчётная область на всех рисунках $|x|, |y| \leq R$, где $R = 10$ мм (а–з) и $R = 25$ мм (и), радиус окружности для расчёта $T3 R_1 = 2R$

В этом разделе теоретически и с помощью моделирования показано, что у соосной суперпозиции нескольких пучков Бесселя-Гаусса с разными топологическими зарядами и разными масштабными параметрами (радиальными проекциями волновых векторов) топологический заряд суперпозиции равен топологическому заряду того пучка Бесселя-Гаусса из суперпозиции, у которого масштабный параметр больше. У суперпозиции только из двух пучков Бесселя-Гаусса с одинаковыми масштабными параметрами топологический заряд равен топологическому заряду того пучка Бесселя-Гаусса, у которого больше амплитуда. Если и амплитуды у двух пучков Бесселя-Гаусса равны, то топологиче-

ский заряд такой суперпозиции равен среднему арифметическому топологических зарядов пучков. Если сумма топологических зарядов двух пучков нечётная, то топологический заряд суперпозиции будет полуцелым. Но на практике из-за конечного радиуса окружности, на котором рассчитывается ТЗ, полуцелого ТЗ для вырожденного случая не получается. Вместо полуцелого ТЗ получается целый ТЗ, меньший из двух. Моделирование показывает, что при небольшой разнице в весовых коэффициентах ТЗ суперпозиции не сохраняется: в ближней зоне и зоне Френеля ТЗ равен большему из двух, а в дальней зоне – меньшему. Причем переход ТЗ от большего к меньшему происходит не скачком, а непрерывно на некотором расстоянии. В переходной зоне ТЗ дробный, и в том числе полуцелый.

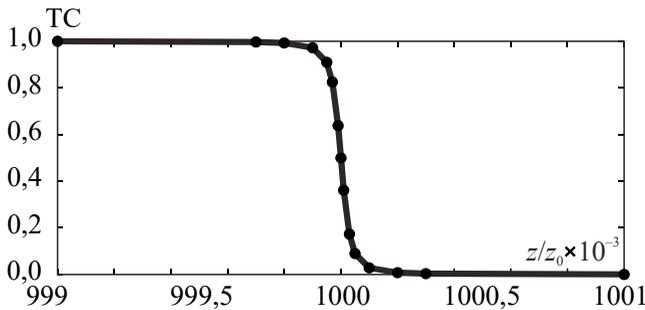


Рис. 6.9. Спад ТЗ с единицы до нуля в области $0,999z_0 \leq z \leq 1,001z_0$

6.2 Орбитальный угловой момент асимметричных пучков Куммера

В [150] рассмотрено семейство гипергеометрических лазерных пучков, комплексная амплитуда которых описывается вырожденной гипергеометрической функцией или функцией Куммера. Функции Куммера активно используются в оптике [151]. Ранее авторы рассматривали асимметричные лазерные пучки Бесселя [13] и Лагерра-Гаусса [14], которые получаются с помощью комплексного смещения аргументов функций комплексного пропускания обычных пучков Бесселя [9] и Лагерра-Гаусса [1]. Заметим, что все упомянутые лазерные пучки являются примерами оптических вихрей и обладают орбитальным угловым моментом. Подход формирования асимметричных лазерных вихревых пучков [13, 14] был позднее развит в работах других авторов [152, 153, 154, 155]. Асимметричные лазерные пучки используются в квантовой информатике для накачки нелинейных кристаллов и формирования методом спонтанной конверсии пары перепутанных фотонов с широким ОУМ-спектром [156].

В этом разделе получены аналитические выражения для комплексной амплитуды асимметричного пучка Куммера, также имеющего вид полумесеца и вращающегося при распространении, и для ОУМ, нормированного на полную мощность. Математически асимметричные пучки Куммера – это четырёхпараметрическое семейство функций, являющихся точным решением параболического уравнения распространения (параксиального уравнения Гельмгольца). Поэтому ОУМ таких пучков зависит от четырёх параметров, два из которых целые, а два других действительные. Эти параметры позволяют варьировать ОУМ пучка Куммера в широких пределах.

6.2.1 Смещённые пучки Куммера

Кратко напомним выражения для несмещённых гипергеометрических пучков (пучков Куммера) [150]. Комплексная амплитуда в начальной плоскости при $z = 0$ имеет вид:

$$E(r, \varphi, z = 0) = (r/w)^{m+i\gamma} \exp(in\varphi - (r^2/w^2)), \quad (6.23)$$

где (r, φ, z) – цилиндрические координаты, w – радиус перетяжки гауссова пучка, n – топологический заряд оптического вихря (целое число), m, γ – целое и действительное числа, параметр γ задает силу логарифмического аксикона, так как $(r/w)^{i\gamma} = \exp[i\gamma \ln(r/w)]$. Выражение для комплексной амплитуды при любом $z > 0$ можно получить с помощью преобразования Френеля [150]:

$$E(r, \varphi, z) = \frac{(-i)^{n+1}}{n!} \Gamma\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}\right) \left(\frac{z_0}{zq(z)}\right) q^{-(m+i\gamma)/2}(z) \times \\ \times \exp\left(in\varphi + \frac{ikr^2}{2z}\right) x^{n/2} {}_1F_1\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}, n+1, -x\right), \quad (6.24)$$

где $z_0 = kw^2/2$, $q(z) = 1 - iz_0/z$, $x = \left[kwr / (2z\sqrt{q(z)})\right]^2$.

Для получения асимметричного пучка Куммера аргументы комплексной амплитуды (x, y) надо сместить в комплексную плоскость. Понятно, что смещение на действительную величину не приведет к изменению вида пучка и его ОУМ. Ограничимся смещением вида: $x \rightarrow x - aw$, $y \rightarrow y - iaw$, где a – безразмерная действительная величина. При таком смещении оптический вихрь не изменяется: $(x+iy)^n = [(x-aw)+i(y-iaw)]^n$. Тогда вместо (6.23) запишем комплексную амплитуду смещенного пучка Куммера в начальной плоскости:

$$E_s(r, \varphi, z=0) = \frac{(x+iy)^n}{w^n} \left(\frac{s}{w}\right)^{m-n+iy} \exp\left(-\frac{s^2}{w^2}\right), \quad (6.25)$$

где $s^2 = (x-aw)^2 + (y-iaw)^2$.

Из (6.25) видно, что при $\gamma = 0$ смещение в начальной плоскости приводит к появлению двух точек фазовой сингулярности: оптический вихрь с центром в точке $(0, 0)$ и с топологическим зарядом $(m+n)/2$ и оптический вихрь с центром в точке $(2aw, 0)$ и с топологическим зарядом $(n-m)/2$. При $\gamma \neq 0$ в этих же точках возникают две амплитудные сингулярности, поскольку ноль не может возводиться в мнимую степень.

Далее вместо (6.24) запишем комплексную амплитуду смещенного пучка Куммера при любом z :

$$E_s(r, \varphi, z) = \frac{(-i)^{n+1}}{n!} \left(\frac{z_0}{zq(z)}\right) q^{-(m+iy)/2}(z) \Gamma\left(\frac{m+n+2+iy}{2}\right) \left(\frac{kwr}{2z\sqrt{q(z)}}\right)^n \times \exp\left(in\varphi + \frac{iks^2}{2z}\right) {}_1F_1\left(\frac{m+n+2+iy}{2}, n+1, -\xi\right), \quad (6.26)$$

где

$$s^2 = r(r-2awe^{i\varphi}), \quad \xi = \left[\frac{kws}{(2z\sqrt{q(z)})}\right]^2.$$

Из (6.26) видно, что амплитуда смещённого пучка Куммера имеет в качестве множителя r^n и поэтому равна нулю при $r=0$. То есть на оптической оси ($r=0$) имеет место n -кратно вырожденный ноль интенсивности, вокруг которого распространяется оптический вихрь с топологическим зарядом n . То есть, несмотря на смещение пучка Куммера, точка сингулярности осталась в центре системы координат на оптической оси. Приравняем комплексный аргумент функции Куммера в (6.26) к комплексному значению корня $\gamma_p = a_p + ib_p$, $p = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ (${}_1F_1(b, c, \gamma_p) = 0$). Асимптотика корней функции Куммера получена в [157]:

$$\gamma_p \approx 2\pi ip + \left(1 + \frac{c-2b}{2\pi ip}\right) \left[(c-2b) \log 2\pi |p| + \log \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(c-b)} \pm i \frac{\pi}{2} (c-2) \right] + \frac{2b(b-c)-c}{2\pi ip} + O\left(\frac{\log |p|}{p^2}\right), \quad p \rightarrow \pm\infty. \quad (6.27)$$

Из (6.27) следует, что при $c = 2b$ корни функции Куммера чисто мнимые. Уместно здесь напомнить, как связана функция Куммера с присоединенными многочленами Лагерра и функциями Бесселя [158]:

$$L_n^m(x) = \binom{n+m}{n} {}_1F_1(-n, m+1, x), \quad (6.28)$$

$$J_\nu(x) = \Gamma^{-1}(1+\nu) \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \times e^{ix} {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, -2ix\right).$$

Таким образом, асимметричный пучок Куммера является обобщением асимметричных пучков Бесселя и Лагерра-Гаусса.

Приравнивая аргумент функции Куммера в (6.26) значению корня (6.27), получим два уравнения для координат изолированных нулей интенсивности асимметричного пучка Куммера:

$$\begin{cases} y_p = -\frac{z}{akw} \left(a_p - \frac{z}{z_0} b_p \right), \\ x_p = aw \pm \left[a^2 w^2 - \left(\frac{2z}{kw} \right)^2 \left(a_p + \frac{z_0}{z} b_p \right) - \left(\frac{z}{akw} \right)^2 \left(a_p - \frac{z}{z_0} b_p \right)^2 \right]^{1/2}. \end{cases} \quad (6.29)$$

Два знака в выражении для координат x_p объясняются тем, что при $z=0$ из (6.25) следует, что у интенсивности имеется два нуля на горизонтальной оси при $x=0$ и при $x=2aw$. Из (6.29) следует, что в дальней зоне дифракции (при $z \gg z_0$) нули асимметричного пучка Куммера будут иметь координаты:

$$\begin{cases} y_p = \frac{z^2 b_p}{akwz_0}, \\ x_p = \pm \frac{z^2 b_p}{akwz_0} i. \end{cases} \quad (6.30)$$

Но, как сами нули смещенного пучка Куммера, так и их координаты комплексные, и в распределении интенсивности эти нули проявляются в виде локальных минимумов и не формируют дополнительных точек сингулярности. В дальней зоне аргумент ζ функции Куммера в (6.26) стремится к нулю, а сама функция, поэтому стремится к единице. Из (6.26) видно, что в этом случае остаётся только один ноль интенсивности – на оптической оси ($r=0$). Это означает, что при распространении от начальной плоскости к дальней зоне два оптических вихря с топологическими

зарядами $(m+n)/2$ и $(n-m)/2$ преобразуются в один вихрь с суммарным зарядом n .

Из (6.30) видно, что координаты комплексных нулей интенсивности (минимумов интенсивности) определяются только мнимой частью b_p комплексных корней функции Куммера γ_p .

Также из (6.26) следует, что вся картина распределения интенсивности в поперечном сечении асимметричного пучка Куммера незначительно изменяется и поворачивается в при распространении на угол пропорциональный фазе ГОУ $\arctg(z/z_0)$ на угол 45 градусов на расстоянии Рэлея и на угол 90 градусов в дальней зоне. Направление вращения зависит от знака топологического заряда. Так как $n>0$, то пучок будет вращаться против часовой стрелки.

На основе (6.26) запишем интенсивность асимметричного пучка Куммера:

$$I_s(r, \varphi, z) = \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{z_0}{z}\right)^{2n+2} \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right)^{-\frac{n+m+2}{2}} \left| \Gamma\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}\right) \right|^2 \times \exp\left(2\frac{k}{z} a w r \sin \varphi\right) \exp\left[\gamma \arctg\left(\frac{z_0}{z}\right)\right] \left(\frac{r}{w}\right)^{2n} \left| {}_1F_1\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}, n+1, -\xi\right) \right|^2 \quad (6.31)$$

Так как аргумент у экспоненты и у функции Куммера в (6.31) зависит и от r , и от φ , распределение интенсивности (6.31) не обладает осевой симметрией и имеет вид полумесяца, растущего при $a > 0$, или убывающего при $a < 0$. При $z=0$ полумесяц интенсивности имеет симметрию относительно оси x , и при увеличении z поворачивается по часовой стрелке (при $a > 0$).

6.2.2 Орбитальный угловой момент асимметричного пучка Куммера

Орбитальный угловой момент парааксиального пучка рассчитывается по формуле:

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) E^*(x, y) dx dy, \quad (6.32)$$

где Im – мнимая часть числа, E^* – сопряжение комплекснозначной функции E , а полная мощность пучка рассчитывается по формуле:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) E^*(x, y) dx dy. \quad (6.33)$$

Так как и ОУМ и мощность сохраняются при распространении пучка, то их можно рассчитывать в любой поперечной плоскости. Например, рассчитывая ОУМ в начальной плоскости, получим:

$$\frac{J_z}{W} = n + \left(\frac{2a}{w}\right) \frac{W_1}{W} + \gamma aw \frac{W_2}{W} + (m-n)aw \frac{2awW_3 - W_4}{W}, \quad (6.34)$$

где

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L_{m,n} dx dy, \quad W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x L_{m,n} dx dy,$$

$$W_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{x^2 + y^2} L_{m,n+2} dx dy,$$

$$W_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} L_{m,n+2} dx dy,$$

$$W_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + y^2} L_{m,n+2} dx dy,$$

$$L_{m,n} = \frac{1}{w^{2m}} \exp\left[-\frac{2}{w^2}(x^2 - 2awx + y^2)\right] \left[(x^2 - 2awx + y^2)^2 + (2awy)^2 \right]^{(m-n)/2} \times \\ (x^2 + y^2)^n \exp\left[\gamma \operatorname{arctg}\left(\frac{2awy}{x^2 - 2awx + y^2}\right)\right].$$

Правая часть (6.34) имеет четыре слагаемых, каждое из которых может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от знаков ($a > 0$): n , γ , $(m-n)$. То есть у асимметричного пучка Куммера ОУМ может быть, как больше, так и меньше, чем у симметричного пучка ($J_z/W = n$). Из (6.34) следует, что при отсутствии смещения ($a = 0$) нормированный на мощность пучка Куммера ОУМ равен топологическому заряду n . При $m = n$ и $\gamma = 0$ из (6.34) следует, что ОУМ равен

$$\frac{J_z}{W} = n + \left(\frac{2a}{w}\right) \frac{W_1}{W}, \\ W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x L_n dx dy, \quad W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L_n dx dy, \quad (6.35) \\ L_n = \exp\left[-\frac{2(x-aw)^2}{w^2} - \frac{2(y^2 - a^2w^2)}{w^2}\right] (x^2 + y^2)^n.$$

Из (6.35) следует, что ОУМ при смещении увеличивается пропорционально смещению $a > 0$, а также пропорционально первому моменту интенсивности. Второе слагаемое в (6.35) всегда положительно.

6.2.3 Численное моделирование

На рис. 6.10 и 6.11 показаны распределения интенсивности и фазы двух асимметричных пучков Куммера в начальной плоскости ($z=0$) и после распространения в свободном пространстве. При расчётах использовались следующие значения параметров: длина волны $\lambda=532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w=500$ мкм, топологический заряд оптического вихря $n=1$, параметр асимметрии $a=0,2$ (рис. 6.10) и $a=-0,2$ (рис. 6.11), показатель амплитудной степенной составляющей $m=3$, параметр логарифмического аксикона $\gamma=0$, расстояние распространения в пространстве $z=2$ м, расчётная область $-R \leq x, y \leq R$ ($R=4$ мм).

На вставке в рис. 6.10б и 6.11б видно, что в начальной плоскости имеется два оптических вихря: вихрь с топологическим зарядом $(m+n)/2=2$ в центре и с топологическим зарядом $(n-m)/2=-1$ справа на рис. 6.10 (и слева на рис. 6.11). На рис. 6.10в и 6.11в видно, что при распространении полумесяц интенсивности повернулся примерно на 45 градусов (так как длина Рэлея немного меньше 2 м) против часовой стрелки, как и предсказывалось теорией. На рис. 6.10г и 6.11г видно, что действительно два вихря с топологическими зарядами $+2$ и -1 в дальней зоне преобразовались в один вихрь с зарядом $+1$.

В этом разделе приведены точные выражения для комплексной амплитуды и для орбитального углового момента асимметричных пучков Куммера (аПК), скалярная комплексная амплитуда которых пропорциональна функции Куммера (вырожденной гипергеометрической функции). Эти пучки являются точным решением параксиального уравнения распространения (уравнения типа Шредингера) и получаются из обычных симметричных гипергеометрических пучков путем комплексного смещения аргументов. При распространении аПК слабо изменяют свою интенсивность и вращаются вокруг оптической оси. Эти пучки пример вихревых лазерных пучков с дробным орбитальным угловым моментом, величина которого зависит от четырёх параметров: топологического заряда вихря, величины смещения, параметра логарифмического аксикона и степени радиального множителя. Изменяя эти параметры можно управлять ОУМ пучка: непрерывно увеличивать или уменьшать его.

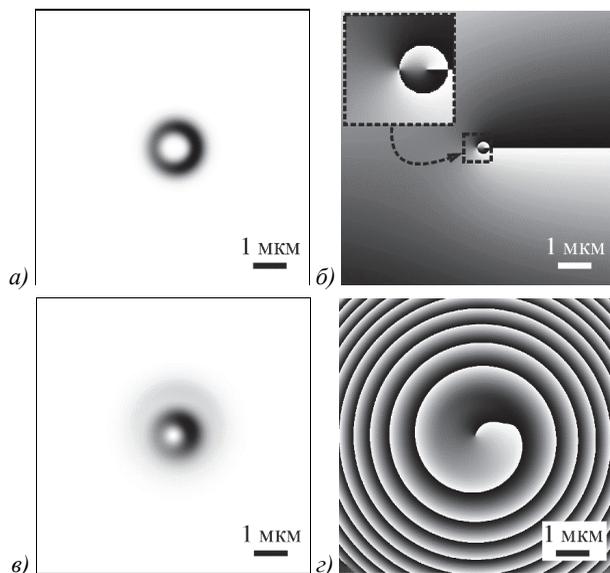


Рис. 6.10. Распределения интенсивности (а, в) (негатив) и фазы (б, з) (чёрный цвет – 0, белый цвет – 2π) асимметричного пучка Куммера ($a = 0,2$) в начальной плоскости $z = 0$ (а, б) и после распространения в свободном пространстве (в, з)

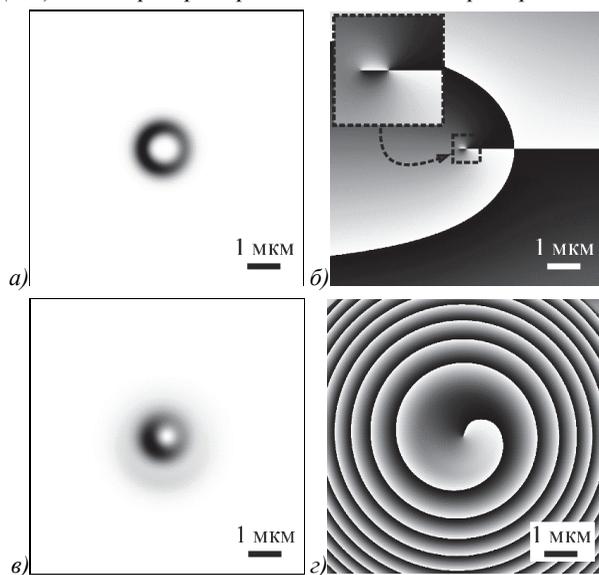


Рис. 6.11. Распределения интенсивности (а, в) (негатив) и фазы (б, з) (чёрный цвет – 0, белый цвет – 2π) асимметричного пучка Куммера ($a = -0,2$) в начальной плоскости $z = 0$ (а, б) и после распространения в свободном пространстве (в, з)

6.3 Пучки Фурье-Бесселя с конечной энергией

Большое внимание в оптике уделяют инвариантным к распространению световым пучкам, которые распространяются в свободном пространстве или в оптической системе, сохраняя свою поперечную структуру (вплоть до масштаба и поворота). Среди пучков, которые распространяются без дифракции, наиболее известны пучки Бесселя [46], пучки Матье [159] и параболические пучки [160]. Все эти пучки представляют собой решение непараксиального уравнения Гельмгольца, обладают бесконечной энергией и, вследствие этого, могут быть сгенерированы только приближенно. Например, пучки Бесселя обычно генерируются с помощью аксикона [161, 162], в то время как их изображение в дальней зоне (идеальные оптические вихри), как это было показано в [163], лучше формируются с использованием другого фазового элемента. В том же 1987 году, когда были открыты пучки Бесселя, также были предложены пучки Бесселя-Гаусса [10], обладающие конечной энергией. Как пучки Бесселя, так и пучки Бесселя-Гаусса не являются Фурье-инвариантными, поскольку преобразование Фурье пучков Бесселя дает кольцевую дельта-функцию Дирака, тогда как преобразование Фурье пучков Бесселя-Гаусса описывается модифицированной функцией Бесселя. Позже появились различные семейства вихревых пучков, амплитуда которых пропорциональна функции Бесселя. К этим семействам относятся пучки Бесселя с квадратичной радиальной зависимостью [164], обобщенные пучки Бесселя-Гаусса [165], пучки Ханкеля-Бесселя [166], асимметричные пучки Бесселя [13] и Бесселя-Гаусса [39] или дробные пучки Бесселя [167]. Однако все перечисленные выше типы пучков Бесселя [10, 13, 39, 46, 164, 165, 166, 167] не являются Фурье-инвариантными. В [168] описаны неизменяющиеся по форме бesselевы пучки (в том числе высокого порядка), которые экспериментально генерировались из гауссова пучка с помощью двух аксиконов.

Параксиальное распространение в свободном пространстве и в оптических системах обычно описывается некоторыми интегральными преобразованиями, такими как преобразование Френеля, ABCD-преобразование или преобразование Фурье. Последнее описывает распространение от передней фокальной плоскости тонкой сферической линзы к задней фокальной плоскости. Для невихревых полей собственные функции указанных линейных канонических преобразований подробно исследованы в [169]. Среди оптических вихрей наиболее известным Фурье-инвариантным полем является пучок Лагерра-Гаусса (ЛГ) [8]. Обычные пучки ЛГ имеют широкую темную область в центре.

Это создает ряд проблем в задачах интерферометрии, где требуются пучки с более узким темным пятном. Такие пучки также можно использовать для эффективного вращения металлических (поглощающих) частиц, поскольку такие микрочастицы захватываются в центральную темную область.

В этом разделе мы аналитически описываем световое поле, которое инвариантно к преобразованию Фурье, содержит оптический вихрь и имеет слабые боковые лепестки. Это поле удовлетворяет параксиальному волновому уравнению. Однако его комплекснозначная амплитуда найдена только в зоне дифракции Фраунгофера. Этот пучок имеет конечную энергию, хотя и не обладает гауссовой огибающей. По мнению авторов, в данном разделе впервые продемонстрирован пучок с конечной энергией, комплексная амплитуда которого содержит только функцию Бесселя. Отметим, что радиальное распределение комплексной амплитуды найденного пучка пропорционально функции Бесселя дробного порядка. Если сравнивать с полувещными бesselевыми пучками [167], представленные пучки Бесселя дробного порядка описываются функцией Бесселя, имеющей порядок нечетного целого числа, деленного на 6. Главное геометрическое отличие предложенных пучков Бесселя дробных порядков от мод ЛГ с нулевым радиальным номером заключается в том, что темное пятно первых меньше. А основное отличие от бездифракционных бesselевидных пучков [168] – слабые боковые лепестки.

6.3.1 Амплитуда пучков Фурье-Бесселя

Пусть исходное поле в начальной плоскости (передняя фокальная плоскость сферической линзы) имеет следующую комплексную амплитуду:

$$E_1(r, \varphi) = \left(\sqrt{\alpha}r\right)^{-(m+1)/3} J_{(2m-1)/6}(\alpha r^2) \exp(i\alpha r^2 + im\varphi), \quad (6.36)$$

где (r, φ) – полярные координаты, m – топологический заряд оптического вихря, α – коэффициент масштабирования. Согласно [170], в дальней зоне (задняя фокальная плоскость сферической линзы) комплексная амплитуда имеет вид:

$$E_2(\rho, \theta) = \frac{-ik}{2\pi f} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E_1(r, \varphi) \exp\left\{-i\frac{k}{f}\rho r \cos(\varphi - \theta)\right\} r dr d\varphi, \quad (6.37)$$

где (ρ, θ) – полярные координаты в дальней зоне, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число света с длиной волны λ , f – фокусное расстояние линзы. Подставляя (6.36) в (6.37), получим:

$$E_2(\rho, \theta) = \frac{-ik}{2\pi f} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (\sqrt{\alpha r})^{-(m+1)/3} J_{(2m-1)/6}(\alpha r^2) \times \exp\left\{i\alpha r^2 + im\varphi - i\frac{k}{f}\rho r \cos(\varphi - \theta)\right\} r dr d\varphi. \quad (6.38)$$

Вычисляя интеграл по φ , мы получим:

$$E_2(\rho, \theta) = (-i)^{m+1} \frac{k}{f \alpha^{(m+1)/6}} \exp(im\theta) \times \int_0^\infty r^{(2-m)/3} J_{(2m-1)/6}(\alpha r^2) \exp(i\alpha r^2) J_m\left(\frac{k}{f}\rho r\right) dr. \quad (6.39)$$

В [171] есть интеграл (выражение 2.12.40.15):

$$\int_0^\infty x^{(2-\nu)/3} \left\{ \frac{\sin bx^2}{\cos bx^2} \right\} J_{(2\nu-1)/6}(bx^2) J_\nu(cx) dx = (4b)^{(\nu-2)/3} c^{-(\nu+1)/3} \left\{ \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right\} J_{(2\nu-1)/6}\left(\frac{c^2}{16b}\right), \quad (6.40)$$

где $b, c > 0$, $\text{Re } \nu > -(7 \pm 3)/4$ и

$$\varphi = (\nu + 1) \frac{\pi}{6} - \frac{c^2}{16b}. \quad (6.41)$$

Используя этот интеграл, из уравнения (6.39) получим:

$$E_2(\rho, \theta) = i^{-2(m+1)/3} \left(\frac{k}{4f}\right)^{(2-m)/3} \alpha^{(m-5)/6} \rho^{-(m+1)/3} \times \exp\left(-\frac{ik^2\rho^2}{16\alpha f^2} + im\theta\right) J_{(2m-1)/6}\left(\frac{k^2\rho^2}{16\alpha f^2}\right). \quad (6.42)$$

Согласно уравнениям (6.36) и (6.42), входное и выходное поля имеют одинаковую осесимметричную структуру интенсивности:

$$I(r, \varphi) = |E(r, \varphi)|^2 \sim \xi^{-(m+1)/3} J_{(2m-1)/6}^2(\xi),$$

где $\xi = \beta r^2$, а β – некоторое действительное число. Из уравнений (6.36) и (6.42) также можно видеть, что если $\alpha = k/(4f)$, то входной и выходной пучки имеют одинаковый радиус.

В некоторых специальных случаях, когда, например, $m = 2, 5, 8, 11, \dots$, функция Бесселя приобретает полуцелый порядок, и комплексная амплитуда может быть выражена через элементарные функции. Например, при $m = 2$:

$$E_1(r, \varphi) = \sqrt{2/\pi} \xi_1^{-1} \sin \xi_1 \exp(i\xi_1 + 2i\varphi), \quad (6.43)$$

$$E_2(\rho, \theta) = -\frac{k}{\sqrt{8\pi f \alpha}} \xi_2^{-1} \sin \xi_2 \exp(-i\xi_2 + 2i\theta), \quad (6.44)$$

где

$$\xi_1 = \alpha r^2, \quad (6.45)$$

$$\xi_2 = \frac{k^2 \rho^2}{16\alpha f^2}, \quad (6.46)$$

Стоит отметить, однако, что фурье-инвариантное распределение, полученное из уравнений (6.36) и (6.42), имеет недостаток. Комплексная амплитуда светового поля должна быть непрерывной. Чтобы избежать сингулярности при $r = 0$, топологический заряд должен удовлетворять условию $m \geq 2$. Однако, из формул (6.43) и (6.44) видно, что даже при $m = 2$ существует вихрь 2-го порядка без нуля интенсивности, так как комплексные амплитуды (6.43), (6.44) вблизи оптической оси имеют вид:

$$E_1(r \rightarrow 0, \varphi) = \sqrt{2/\pi} \exp(i\alpha r^2 + 2i\varphi),$$

$$E_2(\rho \rightarrow 0, \theta) = -\frac{k}{\sqrt{8\pi f \alpha}} \exp\left(-\frac{ik^2 \rho^2}{16\alpha f^2} + 2i\theta\right).$$

Кроме того, не только само поле, но и его производная также должна быть непрерывной (поскольку магнитное поле должно быть непрерывным). Выражение для $\partial E/\partial r$ довольно громоздко, и здесь оно не приведено, но оно показывает, что для исключения сингулярности (без нулевой интенсивности) мы должны полагать, что $m \geq 5$. При $m = 5$ комплексная амплитуда может быть записана следующим образом:

$$E_1(r, \varphi) = \sqrt{2/\pi} \xi_1^{-5/2} (\sin \xi_1 - \xi_1 \cos \xi_1) \exp(i\xi_1 + 5i\varphi), \quad (6.47)$$

$$E_2(\rho, \theta) = \frac{k}{\sqrt{8\pi f \alpha}} \xi_2^{-5/2} (\sin \xi_2 - \xi_2 \cos \xi_2) \exp(-i\xi_2 + 5i\theta), \quad (6.48)$$

где ξ_1 и ξ_2 определены в (6.45) и (6.46).

6.3.2 Энергия мод Фурье-Бесселя дробного порядка

Получим выражение для энергии предложенных пучков. Уравнение (6.42) можно переписать в виде:

$$E_2(\rho, \theta) = i^{-2(m+1)/3} (k/4\alpha f) \xi_2^{-(m+1)/6} \exp(-i\xi_2 + im\theta) J_{(2m-1)/6}(\xi_2), \quad (6.49)$$

где

$$\xi = k^2 \rho^2 / 16 \alpha f^2. \quad (6.50)$$

Таким образом, энергия пучка определяется выражением

$$W = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |E_2(\rho, \theta)|^2 \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{\alpha} \int_0^\infty \xi^{-(m+1)/3} J_{(2m-1)/6}^2(\xi) d\xi. \quad (6.51)$$

Используя справочный интеграл (выражение 2.12.31.2 в [171]), получаем энергию пучка:

$$W = \frac{\pi^{3/2}}{3^{m/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{6}\right)\Gamma\left(\frac{m+4}{6}\right)\Gamma\left(\frac{m+5}{6}\right)} \frac{1}{\alpha}. \quad (6.52)$$

Таким образом, в отличие от обычных бездифракционных пучков Бесселя, энергия пучков Фурье-Бесселя дробных порядков конечна.

6.3.3 Моделирование

В этом разделе мы сравниваем пучки Фурье-Бесселя дробного порядка с хорошо известными модами ЛГ, которые сохраняются при распространении в пространстве и, в частности, в дальней зоне. В исходной плоскости комплексная амплитуда моды ЛГ (в полярных координатах) имеет вид:

$$E_1(r, \varphi) = \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_1}\right)^m L_p^m\left(\frac{2r^2}{w_1^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w_1^2} + im\varphi\right), \quad (6.53)$$

где w_1 – радиус перетяжки гауссова пучка, m и p – азимутальный (топологический заряд) и радиальный индексы моды соответственно. Предположим, что радиальный индекс p равен нулю, чтобы избежать периферийных световых колец. Когда такой пучок падает на сферическую линзу, то в фокальной плоскости, применяя преобразованное Фурье, мы получим следующее распределение амплитуды:

$$E_2(\rho, \theta) = (-i)^{m+1} \left(\frac{z_R}{f}\right) \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w_2}\right)^m \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_2^2} + im\theta\right), \quad (6.54)$$

где f – фокусное расстояние линзы, а

$$\begin{aligned} z_R &= kw_1^2/2, \\ w_2 &= w_1(f/z_R). \end{aligned} \quad (6.55)$$

На рис. 6.12 показаны распределения интенсивности и фазы пучков Фурье-Бесселя дробного порядка и мод ЛГ в начальной плоскости (передняя фокальная плоскость линзы) и в дальней зоне (задняя фокальная

плоскость линзы). В ходе моделирования использовались следующие параметры: длина волны $\lambda = 532$ нм, фокусное расстояние линзы $f = 1$ м, топологический заряд оптического вихря $m = 5$. Коэффициент масштабирования моды Фурье-Бесселя дробного порядка и радиус перетяжки моды ЛГ соответственно равны $\alpha = k/(4f) \approx 2,95 \text{ мм}^{-2}$ и $w_1 = (2f/k)^{1/2} \approx 411$ мкм. При этих значениях размер пучка в выходной плоскости точно такой же, как в начальной. Размер расчетной области $R = 2$ мм ($-R \leq x, y \leq R$). Распределения интенсивности и фазы в начальной плоскости были рассчитаны с использованием формул (6.36) и (6.53), тогда как распределения интенсивности в выходной плоскости были получены с использованием преобразования Френеля, реализованного в виде свертки с применением алгоритма быстрого преобразования Фурье.

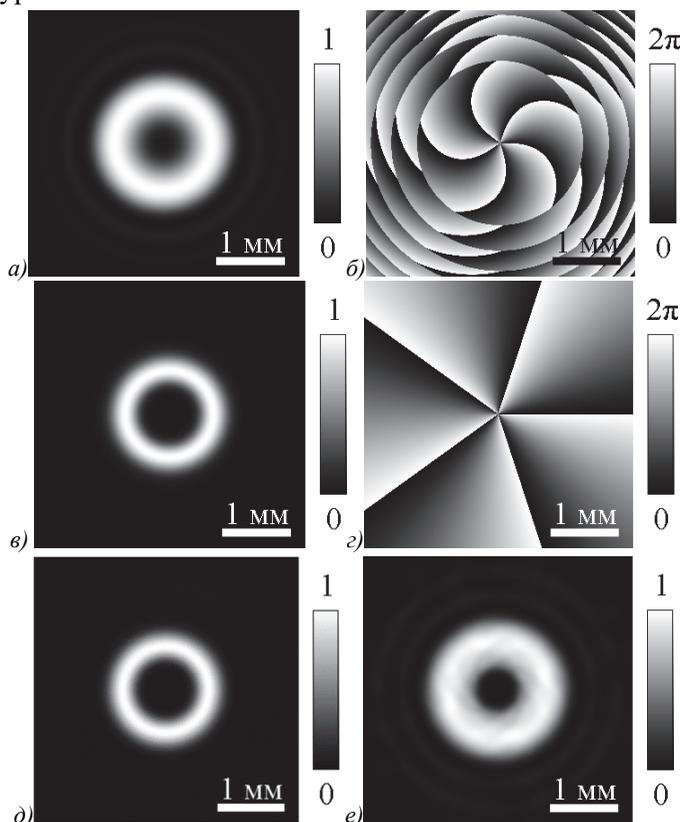


Рис. 6.12. Распределение интенсивности (а, в, д, е) и фазы (б, з) пучка Фурье-Бесселя дробного порядка (а, б, д) и моды ЛГ (в, з, е) в исходной плоскости (передняя фокальная плоскость линзы) (а–з) и в дальней зоне (задняя фокальная плоскость линзы) (д, е)

Как видно из рис. 6.12, распределения интенсивности в выходной плоскости действительно выглядят очень похожими на распределения во входной плоскости, хотя они были получены численно с помощью двух преобразований Френеля, а не по формулам (6.42) и (6.54). Оба пучка имеют поперечную интенсивность в виде светового кольца, в то время как распределение их фаз кардинально отличается. В то время как мода ЛГ содержит только фазу вихря, пучок Фурье-Бесселя дробного порядка дополнительно имеет фазу, подобную параболической линзе. Также видно, что световое кольцо пучка Фурье-Бесселя намного толще, и поэтому, внутреннее темное пятно меньше. Ширина кольца по полуспаду интенсивности у пучка Фурье-Бесселя составляет 624 мкм, тогда как световое кольцо ЛГ имеет ширину 340 мкм, т.е. почти вдвое меньше.. У моды ЛГ боковые лепестки отсутствуют, в то время как у пучка Фурье-Бесселя дробного порядка боковые лепестки составляют 4,6% от максимальной интенсивности.

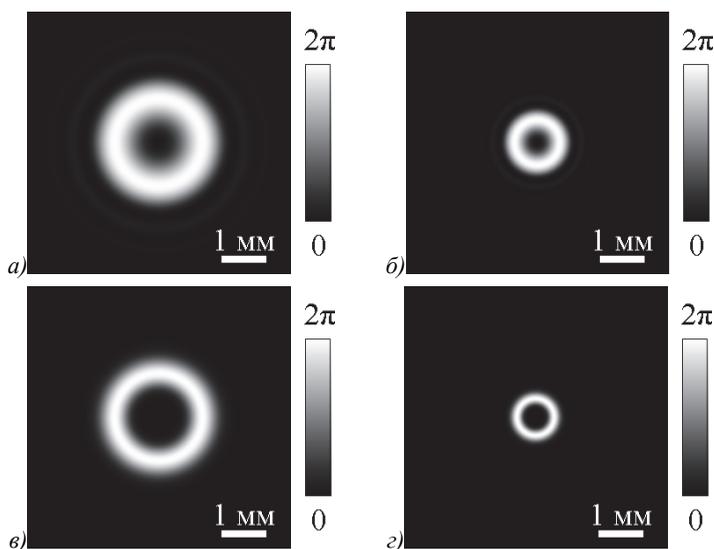


Рис. 6.13. Распределения интенсивности пучка Фурье-Бесселя дробного порядка (а, б) и моды ЛГ (в, г) в исходной плоскости (передняя фокальная плоскость линзы) (а, в) и в дальней зоне (задняя фокальная плоскость линзы) (б, г)

Дополнительно была изучена расхожимость обоих видов пучков. Параметры были выбраны так, чтоб пучок Фурье-Бесселя дробного порядка и мода ЛГ имели одинаковый радиус кольца в исходной плоскости: $r_1 = 1$ мм. На рис. 6.13 показаны распределения интенсивности пучка Фурье-Бесселя и моды ЛГ в передней и задней фокальных плоскостях тонкой линзы. В процессе моделирования были использованы

следующие параметры: длина волны $\lambda = 532$ нм, фокусное расстояние линзы $f = 1$ м, топологический заряд оптического вихря $m = 5$. Коэффициент масштабирования моды Фурье-Бесселя дробного порядка и радиус перетяжки моды ЛГ соответственно равны $\alpha \approx 1,526 \text{ мм}^{-2}$ и $w_1 \approx 633$ мкм (такие α и w_1 позволяют получить радиус кольца распределения интенсивности $r_1 = 1$ мм в исходной плоскости). Размер расчетной области $R = 3$ мм ($-R \leq x, y \leq R$). Распределения интенсивности в начальной плоскости были рассчитаны с использованием формул (6.36) и (6.53), тогда как распределения интенсивности в выходной плоскости мы получили с помощью формул (6.42) и (6.54).

На рис. 6.14 показаны сечения пучка Фурье-Бесселя и моды ЛГ в передней и задней фокальных плоскостях линзы.

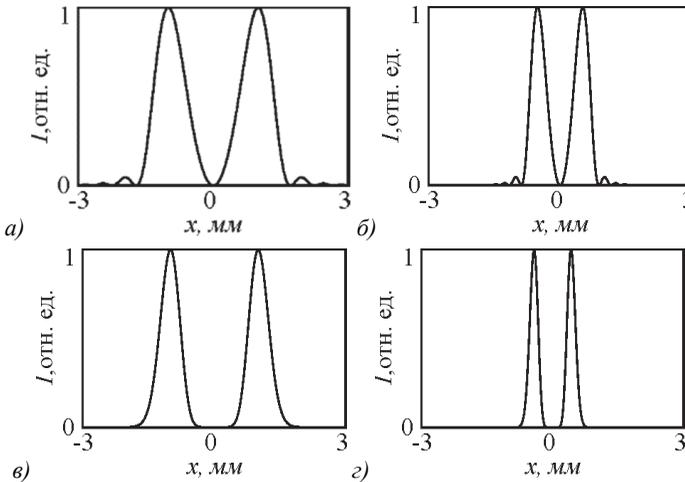


Рис. 6.14. Горизонтальные сечения интенсивностей (рис.6.13) пучка Фурье-Бесселя дробного порядка (а, б) и моды ЛГ (в, г) в исходной плоскости (передняя фокальная плоскость линзы) (а, в) и в дальней зоне (задняя фокальная плоскость линзы) (б, г)

Как показывает численное моделирование (рис. 6.13, 6.14), в дальней зоне (задняя фокальная плоскость) для пучка Фурье-Бесселя радиус максимальной интенсивности на 22% больше ($r_2 \approx 516$ мкм), чем для моды ЛГ ($r_2 \approx 422$ мкм). Как и на рис. 6.12, световое кольцо пучка Фурье-Бесселя на рис. 6.13 почти в 2 раза больше, чем у моды ЛГ. Ширина по полуспаду интенсивности составила 404 мкм и 223 мкм, соответственно. Мы дополнительно измерили диаметр по полуспаду интенсивности внутреннего темного пятна во входной плоскости [рис. 6.14а, в], где радиус кольца обоих пучков одинаков. Он составил 1,14 мм и 1,5 мм для пучка Фурье-Бесселя и моды ЛГ. Таким образом, для пучка

Фурье-Бесселя дробного порядка площадь темного пятна почти в два раза меньше (58 %). Даже в задней фокальной плоскости [рис. 6.14б, z], несмотря на больший радиус кольца пучка Фурье-Бесселя, диаметр его темного пятна меньше, чем у моды ЛГ (592 мкм и 634 мкм соответственно). Разница в размере радиуса светового кольца пучка Фурье-Бесселя и моды ЛГ может быть объяснена теоретически исходя из используемых формул. Согласно (6.53) и (6.54) радиальная зависимость амплитуды моды ЛГ вблизи центра равна $|E| \sim r^m$. Уравнения (6.36) и (6.42) показывают, что, наоборот, для пучка Фурье-Бесселя дробного порядка $|E| \sim r^{(m-2)/3}$. Это означает, что при $r \ll 1$ интенсивность вблизи центра для пучка Фурье-Бесселя растет намного быстрее, чем для моды ЛГ.

В этом разделе мы рассмотрели световые пучки Фурье-Бесселя дробного порядка, которые содержат оптический вихрь, имеют слабые боковые лепестки, и инвариантны к преобразованию Фурье. Все другие известные пучки Бесселя не являются Фурье-инвариантными. Радиальное распределение комплексной амплитуды данных пучков пропорционально функции Бесселя дробного порядка (нечетное целое число, деленное на 6). Эти пучки имеют конечную энергию, и при этом не обладают гауссовой огибающей. У пучков Фурье-Бесселя дробного порядка внутреннее темное пятно меньше, чем у мод ЛГ с нулевым радиальным номером. Возможные области применения предложенных пучков включают в себя оптическую связь [172], интерферометрию [173], и оптический захват [174].

Заключение

В этой книге мы рассчитали топологический заряд для ряда параксиальных скалярных вихревых пучков. Но хорошо известно, что свет обладает, кроме амплитуды и фазы, еще и поляризацией, и описывается тремя проекциями вектора напряженности электрического поля. У векторных световых полей имеются свои точки поляризационной сингулярности, которые, аналогично топологическому заряду, который характеризует топологию волнового фронта вокруг точки фазовой сингулярности для скалярного поля, описываются соответствующими индексами. Например, у векторных световых пучков с неоднородной поляризацией, в каждой точке сечения которых вектор линейной поляризации меняет свое направление, есть точки поляризационной сингулярности (V -точки), в которых направление вектора поляризации не определено. Такие точки характеризуются индексом Пуанкаре-Хопфа, который, аналогично топологическому заряду для скалярных полей, равен целому числу полных поворотов вектора линейной поляризации при обходе V -точки по замкнутому контуру. Аналогично для световых полей с неоднородной эллиптической поляризацией, когда по сечению пучка в каждой точке меняется угол, под которым направлена большая ось эллипса поляризации, имеются точки, в которых нельзя определить угол наклона эллипса поляризации (C -точки). В этих точках поляризация круговая. Такие точки поляризационной сингулярности характеризуются индексом, равным целому числу поворотов на угол π эллипсов поляризации по замкнутому контуру вокруг C -точки. Таким образом, рассмотренные в этой книге методы расчета топологического заряда параксиальных скалярных световых полей подойдут и для расчета топологических индексов, с помощью которых характеризуются точки поляризационной сингулярности непараксиальных векторных световых полей. Читатель может убедиться в этом самостоятельно.

Литература

1. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M. Beijersbergen, R. Spreeuw, J. Woerdman // *Physical Review A*. – 1992. – Vol. 45. – P. 8185.
2. **Volyar, A.** Vortex avalanche in the perturbed singular beams / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2019. – Vol. 36(6). – P. 1064–1071.
3. **Zhang, Y.** Orbital angular momentum transformation of optical vortex with aluminium metasurfaces / Y. Zhang, X. Yang, J. Gao // *Scientific Reports*. – 2019. – Vol. 9. – P. 9133.
4. **Zhang, H.** Grafted optical vortex with controllable orbital angular momentum distribution / H. Zhang, X. Li, H. Ma, M. Tang, H. Li, J. Tang, Y. Cai // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27(16). – P. 22930–22938.
5. **Волярь, А.В.** Формирование и анализ спектров оптических вихрей сингулярных пучков с аномалиями орбитального углового момента / А.В. Волярь, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43. – № 4. – С. 517–527.
6. **Kotlyar, V.V.** Calculation of fractional orbital angular momentum of superpositions of optical vortices by intensity moments / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27(8). – P. 11236–11251.
7. **Kotlyar, V.V.** Orbital angular momentum of a laser beam behind an off-axis spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev, E.S. Kozlova // *Optics Letters*. – 2019. – Vol. 44(15). – P. 3673–3676.
8. **Siegman, A.E.** *Lasers* / A.E. Siegman – University Science, 1986.
9. **Durnin, J.** Diffraction-free beams / J. Durnin, J.J. Miceli, J.H. Eberly // *Physical Review Letters*. – 1987. – Vol. 58. – P. 1499–1501.
10. **Gori, F.** Bessel-Gauss beams / F. Gori, G. Guattary, C. Padovani // *Optics Communications*. – 1987. – Vol. 64(6). – P. 491–495.
11. **Kotlyar, V.V.** Hypergeometric modes / V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Optics Letters*. – 2007. – Vol. 32(7). – P. 742–744.
12. **Bandres, M.A.** Circular beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // *Optics Letters*. – 2008. – Vol. 33. – P. 177–179.

13. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Optics Letters*. – 2014. – Vol. 39(8). – P. 2395–2398.
14. **Kovalev, A.A.** Asymmetric Laguerre-Gaussian beams / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // *Physical Review A*. – 2016. – Vol. 93. – P. 063858.
15. **Berry, M.V.** Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2004. – Vol. 6. – P. 259–268.
16. **Воляр, А.В.** Секторное возмущение вихревого пучка: энтропия Шеннона, орбитальный угловой момент и топологический заряд / А.В. Воляр, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров, В.В. Милуков // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43. – № 5. – С. 723–734.
17. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Gaussian optical vortex / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Letters*. – 2017. – Vol. 42(1). – P. 139–142.
18. **Котляр, В.В.** Дробный орбитальный угловой момент Гауссова пучка с внедренным внеосевым оптическим вихрем / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев, Е.Г. Абрамочкин // *Компьютерная оптика*. – 2017. – Т. 41. – № 1. – С. 22–29.
19. **Indebetouw, G.** Optical vortices and their propagation / G. Indebetouw // *Journal of Modern Optics*. – 1993. – Vol. 40(1). – P. 73–87.
20. **Abramochkin, E.** Spiral-type beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // *Optics Communications*. – 1993. – Vol. 102. – P. 336–350.
21. **Gradshteyn, I.S.** Table of Integrals, Series, and Products / I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik – New York: Academic, 1965.
22. **Gotte, J.B.** Quantum formulation of fractional orbital angular momentum / J.B. Gotte, S. Franke-Arnold, R. Zambrini, S.M. Barnett // *Journal of Modern Optics*. – 2007. – Vol. 54(12). – P. 1723–1738.
23. **Gutiérrez-Vega, J.C.** Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence / J.C. Gutiérrez-Vega, C. López-Mariscal // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2008. – Vol. 10. – ID. 015009.

24. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Pofirev // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56(14). – P. 4095–4104.
25. **Liang, G.** Splitting and rotating of optical vortices due to non-circular symmetry in amplitude and phase distributions of the host beams / G. Liang, W. Cheng // *Physics Letters A*. – 2020. – Vol. 384. – P. 126046.
26. **Kotlyar, V.V.** Vortex laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // CRC Press, Boca Raton. – 2019. – 404P.
27. **Li, S.** Deterministic generation of orbital-angular-momentum multiplexed tripartite entanglement / S. Li, X. Pan, Y. Ren, H. Liu, S. Yu, J. Jing // *Physical Review Letters*. – 2020. – Vol. 124. – P. 083605.
28. **Hiekkamaki, M.** Near-perfect measuring of full-field transverse-spatial modes of light / M. Hiekkamaki, S. Prabhakar, R. Fickler // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27. – P. 31456-31464.
29. **Li, S.** Efficient optical angular momentum manipulation for compact multiplexing and demultiplexing using a dielectric metasurface / S. Li, X. Li, L. Zhang, G. Wang, L. Zhang, M. Liu, C. Zeng, L. Wang, Q. Sun, W. Zhao, W. Zhang // *Advanced Optical Materials*. – 2020. – P. 1901666.
30. **Pryamikov, A.** Light transport and vortex-supported wave-guiding in micro-structured optical fibers / A. Pryamikov, G. Alagashev, G. Falkovich, S. Turitsyn // *Scientific Reports*. – 2020. – Vol. 10. – P. 2507.
31. **Dai, K.** Second-harmonic generation of asymmetric Bessel-Gaussian beams carrying orbital angular momentum / K. Dai, W. Li, K.S. Morgan, Y. Li, J.K. Miller, R.J. Watkins, E.G. Johnson // *Optics Express*. – 2020. – Vol. 28. – P. 2536-2546.
32. **Dimitrov, N.** Inverted field interferometer for measuring the topological charges of optical vortices carried by short pulses / N. Dimitrov, M. Zhekova, G.G. Paulus, A. Dreischuh // *Optics Communications*. – 2020. – Vol. 456. – P. 124530.
33. **Watkins, R.J.** Experimental probing of turbulence using a continuous spectrum of asymmetric OAM beams / R.J. Watkins, K. Dai, G. White, W. Li, J.K. Miller, K.S. Morgan, E.G. Johnson // *Optics Express*. – 2020. – Vol. 28. – P. 924-935.

34. **Hickmann, J.M.** Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using lights orbital angular momentum / J.M. Hickmann, E.J.S. Fonseca, W.C. Soares, S. Chavez-Cerda // *Physical Review Letters*. – 2010. – Vol. 105. – P. 053904.
35. **Alperin, S.N.** Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens / S.N. Alperin, R.D. Niederriter, J.T. Gopinath, M.E. Siemens // *Optics Letters*. – 2016. – Vol. 41(21). – P. 5019-5022.
36. **Kotlyar, V.V.** Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Journal of Modern Optics*. – 1998. – Vol. 45(7). – P. 1495-1506.
37. **Воляр, А.В.** По ту сторону интенсивности или моменты интенсивности и измерение спектра оптических вихрей сложных пучков / А.В. Воляр, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // *Компьютерная оптика*. – 2018. – Т. 42, № 5. – С. 736-743.
38. **Soskin, M.S.** Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortex / M.S. Soskin, V.N. Gorshkov, M.V. Vastnetsov, J.T. Malos, N.R. Heckenberg // *Physical Review A*. – 1997. – Vol. 56(5). – P. 4064-4075.
39. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel-Gauss beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2014. – Vol. 31(9). – P. 1977-1983.
40. **Kotlyar, V.V.** Kummer laser beams with a transverse complex shift / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, E.G. Abramochkin // *Journal of Optics*. – 2020. – Vol. 22(1). – P. 015606.
41. **Kotlyar, V.V.** Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2014. – Vol. 31(2). – P. 274-282.
42. **Kotlyar, V.V.** Vortex Hermite-Gaussian laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Letters*. – 2015. – Vol. 40(5). – P. 701-704.
43. **Kotlyar, V.V.** Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.V. Volyar // *Optics Express*. – 2020. – Vol. 28(6). – P. 8266-8281.
44. **Абрамочкин, Е.Г.** Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников // М.: Физматлит. – 2010. – ISBN 978-5-9221-1216-1.

45. **Krenn, M.** Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna / M. Krenn, R. Fickler, M. Fink, J. Handsteiner, M. Malik, T. Scheidl, R. Ursin, A. Zeilinger // *New Journal of Physics*. – 2014. – Vol. 16. – ID. 113028. – DOI: 10.1088/1367-2630/16/11/113028.
46. **Durnin, J.** Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // *Journal of the Optical Society of America A*. – 1987. – Vol. 4. – P. 651–654. – DOI: 10.1364/JOSAA.4.000651.
47. **Васильев, В.С.** Распространение пучков Бесселя и суперпозиций вихревых пучков в атмосфере / В.С. Васильев, А.И. Капустин, Р.В. Скиданов, Н.А. Ивлиев, В.В. Подлипов, С.В. Ганчевская // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 3. – С. 376–384. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-376-384.
48. **Wang, F.** Average intensity and spreading of partially coherent standard and elegant Laguerre-Gaussian beams in turbulent atmosphere / F. Wang, Y. Cai, H.T. Eyyuboglu, Y. Baykal // *Progress In Electromagnetics Research, PIER* – 2010. – Vol. 103. – P. 33–55. – DOI: 10.2528/PIER10021901.
49. **Chen, Y.** Experimental demonstration of a Laguerre-Gaussian correlated Schell-model vortex beam / Y. Chen, F. Wang, C. Zhao, Y. Cai // *Optics Express* – 2014. – Vol. 22(5). – P. 5826–5838. – DOI: 10.1364/OE.22.005826.
50. **Lukin, V.P.** Beam spreading of vortex beams propagating in turbulent atmosphere / V.P. Lukin, P.A. Konyaev, V.A. Sennikov // *Applied Optics*. – 2012. – Vol. 51(10). – P. C84–C87. – DOI: 10.1364/AO.51.000C84.
51. **Zhu, K.** Propagation of Bessel-Gaussian beams with optical vortices in turbulent atmosphere / K. Zhu, G. Zhou, X. Li, X. Zheng, H. Tang // *Optics Express*. – 2008. – Vol. 16(26). – P. 21315–21320. – DOI: 10.1364/OE.16.021315.
52. **Avramov-Zamurovic, S.** Experimental study of electromagnetic Bessel-Gaussian Schell Model beams propagating in a turbulent channel / S. Avramov-Zamurovic, C. Nelson, S. Guth, O. Korotkova, R. Malek-Madani // *Optics Communications*. – 2016. – Vol. 359. – P. 207–215. – DOI: 10.1016/j.optcom.2015.09.078.

53. **Lukin, I.P.** Integral momenta of vortex Bessel-Gaussian beams in turbulent atmosphere / I.P. Lukin // *Applied Optics*. – 2016. – Vol. 55(12). – P. B61-B66. – DOI: 10.1364/AO.55.000B61.
54. **Wang, L.G.** The effect of atmospheric turbulence on the propagation properties of optical vortices formed by using coherent laser beam arrays / L.G. Wang, W.W. Zheng // *J. Opt. A, Pure Appl. Opt.* – 2009. – Vol. 11(6) – P. 065703. – DOI: 10.1088/1464-4258/11/6/065703.
55. **Abramovitz, M.** Handbook of mathematical functions: With formulas, graphs, and mathematical tables / ed. by M. Abramovitz, I.A. Stegun. – New York: Dover Publications, Inc., 1965. – 1046 p.
56. **Котляр, В.В.** Топологическая стабильность оптических вихрей при дифракции на случайном фазовом экране / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 6. – С. 917–925.
57. **Willner, A. E.** Optical communications using orbital angular momentum beams / A.E. Willner, H. Huang, Y. Yan, Y. Ren, N. Ahmed, G. Xie, C. Bao, L. Li, Y. Cao, Z. Zhao, J. Wang, M.P.J. Lavery, M. Tur, S. Ramachandran, A.F. Molisch, N. Ashrafi, S. Ashrafi // *Advances in Optics and Photonics*. 2015. V.7. P. 66–106.
58. **Rodriguez-Herrera, O.G.** Optical nanoprobng via spin-orbit interaction of light / O.G. Rodriguez-Herrera, D. Lara, K.Y. Bliokh, E.A. Ostrovskaya, C. Dainty // *Phys. Rev. Lett.* – 2010. – V. 104. – P. 253601.
59. **Aksenov, V.P.** The influence of the vortex phase on the random wandering of a Laguerre–Gaussian beam propagating in a turbulent atmosphere: a numerical experiment / V.P. Aksenov, V.V. Kolosov, C.E. Pogutsa // *Journal of Optics*. 2013. V. 15. 044007.
60. **Bazhenov, V.** Laser-beam with screw dislocations in the wavefront / V. Bazhenov, M.V. Vasnetsov, M.S. Soskin // *JEP T Lett.*–1990.–Vol. 53.–P.429-431.
61. **Khonina, S.N.** The rotor phase filter / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, M.V. Shinkarev, V.A. Soifer, G.V. Uspleniev // *J. Mod. Opt.* – 1992. – Vol. 39. – P. 1147–1154.
62. **Wen, J.** Vortex strength and beam propagation factor of fractional vortex beams / J. Wen, L. Wang, X. Yang, J. Zhang, S. Zhu // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27(4). – P. 5893-5904.

63. **Ковалев, А.А.** Орбитальный угловой момент и топологический заряд Гауссова пучка с несколькими оптическими вихрями / А.А. Ковалев, В.В. Котляр, Д.С. Калинин // Компьютерная оптика. – 2020. – Т.44, №1. – С.34-39.
64. **Leach, J.** Observation of the vortex structure of a non-integer vortex beam / J. Leach, E. Yao, M.J. Padgett // New Journal of Physics. – 2004. – Vol. 6. – P. 71. – ISSN 1367-2630.
65. **Ковалев, А.А.** Дифракция Френеля и Фраунгофера гауссова пучка с несколькими поляризационными сингулярностями / А.А. Ковалев, В.В. Котляр // Компьютерная оптика.–2018.– Т. 42.–Вып.2.–С. 179-189.
66. **Kotlyar, V.V.** Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Almazov, S.N. Khonina, V.A. Soifer, H. Elfstrom, J. Turunen // J. Opt. Soc. Am. A. – 2005. – Vol. 22(5). – P. 849-861.
67. **Volyar, A.** Digital sorting perturbed Laguerre-Gaussian beams by radial number / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // J. Opt. Soc. Am. A. –2020. –Vol.37(6). –P.959-968.
68. **Jesus-Silva, A.J.** Study of the birth of a vortex at Fraunhofer zone / A.J. Jesus-Silva, E.J.S. Fonseca, J.M. Hickmann // Optics Letters. – 2012. – Vol. 37(21). – P. 4552-4554. – ISSN 1539-4794.
69. **Alexeyev, C.N.** Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices /C.N. Alexeyev, Yu.A. Egorov, A.V. Volyar // Phys. Rev. A. – 2017. –Vol.96. –P.063807.
70. **Mourka, A.** Visualization of the birth of an optical vortex using diffraction from a triangular aperture / A. Mourka, J. Baumgartl, C. Shanor, K. Dholakia, E.M. Wright // Optics Express. – 2011. – Vol. 19(7). – P. 5760-5771. – ISSN 1094-4087.
71. **Gibson, G.** Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum / G. Gibson, J. Courtial, M.J. Padgett, M. Vasnetsov, V. Pasko, S.M. Barnett, S. Franke-Arnold // Optics Express. – 2004. – Vol. 12. – P. 5448-5456. – ISSN 1094-4087.
72. **Abramochkin, E.G.** Beam transformations and nontransformed beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // Optics Communications. – 1991. – Vol. 83(1-2). – P. 123-135.

73. **White, A.G.** Interferometric measurements of phase singularities in the output of a visible laser / A.G. White, C.P. Smith, N.R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop, R. McDuff, C.O. Weiss, C. Tamm // *Journal of Modern Optics.*, 1991. – Vol. 38, No. 12. – P. 2531–2541.
74. **Налимов, А.Г.** «Моделирование формирования изображения зонной пластинкой в рентгеновском излучении / А.Г. Налимов, В.В. Котляр, В.А. Соيفер // *Компьютерная оптика*, 2011. – Т. 35, № 3. – С. 290-296.
75. **Volovik, G. E.** Line and point singularities in superfluid He3 / G.E. Volovik, V.P. Mineev // *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* –1976. – Vol. 24.–P. 605-608.
76. **Jang, J.** Observation of half-height magnetization steps in S2RuO4 / J. Jang, D.G. Ferguson, V. Vakarynk, R. Budakian, S.B. Chung, P.M. Goldbart, Y. Maeno // *Science.* –2011. –Vol.331. –P.186-188.
77. **Rubo, Y.G.** Half vortices in exciton polariton condensate. / Y.G. Rubo // *Phys. Rev. Lett.* –2007. –V.99. –P.106401.
78. **Flayac, H.** Topological stability of the half-vortices in spinor exciton-polariton condensates / H. Flayac, I.A. Shelukh, D.D. Solnyshkov, G. Malpuech // *Phys. Rev. B.* –2010. –Vol.81. –P.045318.
79. **Vasara, A.** Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms / A. Vasara, J. Turunen, A.T. Friberg // *J. Opt. Soc. Am. A*, 1989. – V. 6, No. 11. – P. 1748-1754.
80. **Heckenberg, N.R.** Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms / N.R. Heckenberg, R. McDuff, C.P. Smith, A.G. White // *Opt. Lett.*, 1992. – V. 17, No. 3. – P. 221-223.
81. **Bazhenov, V.Yu.** Screw dislocations in light wavefronts / V.Yu. Bazhenov, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // *J. Mod. Opt.*, 1992. – V. 39, No. 5. – P. 985-990.
82. **Beijersbergen, M.V.** Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phase plate / M.V. Beijersbergen, R.P.C. Coerwinkel, M. Kristensen, J.P. Woerdman // *Opt. Commun.*, 1994. – V. 112. – P. 321-327.
83. **Fedotowsky, A.** Optimal filter design for annular imaging / A. Fedotowsky, K. Lehovec // *Appl. Opt.*, 1974. – V. 13. – P. 2919–2923.

84. **Khonina, S.N.** Trochoso / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, G.V. Uspleniev, M.V. Shinkarev // *Optics Communications*, 1992. – P. 91, No. 3-4. – P. 158-162.
85. **Marrucci, L.** Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media / L. Marrucci, C. Manzo, D. Paparo // *Phys. Rev. Lett.*, 2006. – V. 96. – P. 163905.
86. **Naik, D.N.** Generation of singular optical beams from fundamental Gaussian beam using Sagnac interferometer / D.N. Naik, N.K. Viswanahan // *J. Opt.*, 2016. – V. 18. – P. 095601.
87. **Zhu, L.** Arbitrary manipulation of spatial amplitude and phase using phase-only spatial light modulators / L. Zhu, J. Wang // *Sci. Reports.* – 2014. – V. 4. – P. 7441.
88. **Devlin, R.C.** Arbitrary spin-to-orbital angular momentum conversion of light / R.C. Devlin, A. Ambrosio, A. Rubin, J.B. Mueller, F. Capasso // *Science*, 2017. – V. 358. – P. 896-901.
89. **Miao, P.** Orbital angular momentum microlaser / P. Miao, Z. Zhang, J. Sun, W. Walasik, S. Longhi, N.M. Litchintser, L. Feng // *Science*, 2016. – V. 353. – P. 464-467.
90. **Vaity, P.** Formation of optical vortices through superposition of two Gaussian beams / P. Vaity, A. Aadhi, R.P. Singh // *Appl. Opt.*, 2013. – V. 52. – P. 6652-6656.
91. **Zhang, J.** Circular polarization analyzer based on the combined coaxial Archimedes' spiral structure / J. Zhang, Z. Guo, R. Li, W. Wang, A. Zhang, J. Liu, S. Qu, J. Gao // *Plasmonics*, 2015. – P. 10, No. 6. – P. 1256–1261.
92. **Zhang, J.** Circular polarization analyzer based on an Archimedean nano-pinholes array / J. Zhang, Z. Guo, K. Zhou, L. Ran, L. Zhu, W. Wang, Y. Sun, F. Shen, J. Gao, S. Liu // *Opt. Exp.*, 2015. – V. 23, No. 23. – P. 30523–30531.
93. **Zhan, H.** generation of acoustic vortex beams with designed Fermat's spiral diffraction grating / H. Zhan, J. Li, K. Guo, Z. Guo // *J. Acous. Soc. Am.*, 2019. – V. 146, No. 6. – P. 4237-4243.
94. **Wang, H.** Vortex beam generation with variable topological charge based on a spiral slit / H. Wang, L. Liu, C. Zhou, J. Xu, M. Zhang, S. Teng, Y. Cai // *Nanophotonics*, 2019. – V. 8. – 317-324.

95. **Petrov, D.V.** Vortex-edge dislocation interaction in a linear medium / D.V. Petrov // *Opt. Commun.*, 2001. – V. 188. – P. 307-312.
96. **Petrov, D.V.** Splitting of an edge dislocation by an optical vortex / D.V. Petrov // *Opt. Quant. Electr.*, 2002. – V. 34. – P. 759-773.
97. **He, D.** Interaction of the vortex and edge dislocation embedded in a cosh-Gaussian beam / D. He, H. Yan, B. Lu // *Opt. Commun.*, 2009. – V. 282. – P. 4035-4044.
98. **Chen, H.** Splitting of an edge dislocation by a vortex emergent from a nonparaxial beam / H. Chen, W. Wang, Z. Gao, W. Li // *J. Opt. Soc. Am. B*, 2019. – V. 36. – P. 2804-2809.
99. **Kotlyar, V.V.** Three different types of astigmatic Hermite-Gaussian beams with orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev, E.S. Kozlova // *Journal of Optics*. – 2019. – V. 21. – Issue 11. – P. 115601.
100. **Kotlyar, V.V.** Vortex astigmatic Fourier-invariant Gaussian beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Express*. – 2019. – V. 27. – Issue 2. – P. 657-666. – DOI: 10.1364/OE.27.000657.
101. **Courtial, J.** Gaussian beams with very high orbital angular momentum / J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, M.J. Padgett // *Opt. Commun.*, 1997. – V. 144, No. 4-6. – P. 210–213.
102. **Kotlyar, V.V.** Elliptic Gaussian optical vortices / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Phys. Rev. A*, 2017. – V. 95. – P. 053805.
103. **Lin, J.** Cosine-Gauss plasmon beam: a localized long-range non-diffracting surface wave / J. Lin, J. Dellinger, P. Genevet, B. Cluzel, F. de Fornel, F. Capasso // *Phys. Rev. Lett.*, 2012. – V. 109, No. 9. – P. 093904.
104. **Lu, B.** Analytical propagation equation of astigmatic Hermite-Gaussian beams through a 4x4 paraxial optical systems and their symmetrizing transformation / B. Lu, P. Wu // *Opt. Las. Technol.*, 2003. – V. 35. – P. 497-504.
105. **Chen, Y.F.** Characterizing the propagation evolution of wave patterns and vortex structures in astigmatic transformations of Hermite-Gaussian beams / Y.F. Chen, C.C. Chay, C.Y. Lee, J.C. Tung, H.C. Liang, K.T. Huang // *Las. Phys.*, 2017. – V. 28. – P. 015002.
106. **Abramochkin, E.G.** Hermite-Laguerre-Gaussian beams in astigmatic optical systems / E.G. Abramochkin, E.U. Razueva, V.G. Volostnikov // *Proc. SPIE*, 2008. – V. 7009. – P. 70090M.

107. **Bekshaev, A.Ya.** Transformation of higher-order optical vortices upon focusing by an astigmatic lens / A.Ya. Bekshaev, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // *Opt. Commun.*, 2004. – V. 241. – P. 237-247.
108. **Bekshaev, A.Ya.** Astigmatic telescopic transformation of a high-order optical vortex / A.Ya. Bekshaev, A.I. Karamoch // *Opt. Commun.*, 2008. – V. 281. – P. 5687-5696.
109. **Zhu, K.** Propagation properties of an astigmatic sin-Gaussian beam in strongly nonlocal nonlinear media / K. Zhu, J. Zhu, Q. Su, H. Tang // *Appl. Sci.*, 2019. – V. 9. – P. 71.
110. **Huang, T.D.** Large astigmatic laser cavity modes and astigmatic compensation / T.D. Huang, T.H. Lu // *Appl Phys. B*, 2018. – V. 124. – P. 72.
111. **Pan, J.** Index-tunable structured-light beams from a laser with an intracavity astigmatic mode converter / J. Pan, Y. Shen, Z. Wan, X. Fu, H. Zhang, Q. Liu // *Phys. Rev. Appl.*, 2020. – V. 14. – P. 044048.
112. **Basistiy, I.V.** Optical wavefront dislocations and their properties / I.V. Basistiy, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // *Opt. Commun.*, 1995. – V. 119. – P. 604–612.
113. **Campbell, G.** Generation of high-order optical vortices using directly machined spiral phase mirrors / G. Campbell, B. Hage, B. Buchler, P. Lam // *Applied Optics*. – 2012. – Vol. 51. – P. 873-876.
114. **Chen, Y.** Generation and characterization of a perfect vortex beam with a large topological charge through a digital micromirror device / Y. Chen, Z. Fang, Y. Ren, L. Gong, R. Lu // *Applied Optics*. – 2015. – Vol. 54. – P. 8030-8035.
115. **Wang, C.** Generation and measurement of high-order optical vortices by using the cross phase / C. Wang, Y. Ren, T. Liu, C. Luo, S. Qiu, Z. Li, H. Wu // *Applied Optics*. – 2020. – Vol. 59. – P. 4040-4047.
116. **Chen, D.** High-order cylindrical vector beams with tunable topological charge up to 14 directly generated from a microchip laser with high beam quality and high efficiency / D. Chen, Y. Miao, H. Fu, H. He, J. Tong, J. Dong // *APL Photonics*. – 2019. – Vol. 4. – P. 106106.
117. **Kumar, P.** Modified Mach-Zehnder interferometer for determining the high-order topological charge of Laguerre-Gaussian vortex beams / P. Kumar, N. Nishchal // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2019. – Vol. 36. – P. 1447-1455.

118. **Li, Y.** Measuring the topological charge of vortex beams with gradually changing-period spiral spoke grating / Y. Li, Y. Han, Z. Cui // *IEEE Photonics Technology Letters*. – 2020. – Vol. 32(2). – P. 101-104.
119. **Nape, I.** Enhancing the modal purity of orbital angular momentum photons / I. Nape, B. Sephton, Y.-W. Huang, A. Vallés, C.-W. Qiu, A. Ambrosio, F. Capasso, A. Forbes // *APL Photonics*. – 2020. – Vol. 5. – P. 070802.
120. **Hong, S.** Hollow silica photonic crystal fiber guiding 101 orbital angular momentum modes without phase distortion in C+ L band / S. Hong, Y.S. Lee, H. Choi, C. Quan, Y. Li, S. Kim, K. Oh // *Journal of Lightwave Technology*. – 2020. – Vol. 38(5). – P. 1010-1018.
121. **Fickler, R.** Quantum entanglement of angular momentum states with quantum numbers up to 10010 / R. Fickler, G. Campbell, B. Buchler, P.K. Lam, A. Zeilinger // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. – 2016. – Vol. 113(48). – P. 13642–13647.
122. **Serna, J.** Orbital angular momentum of partially coherent beams / J. Serna, J. Movilla // *Optics Letters*. – 2001. – Vol. 26. – P. 405-407.
123. **Abramochkin, E.G.** Spiral-type beams: optical and quantum aspects / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // *Optics Communications*. – 1996. – Vol. 125(4-6). – P. 302–323.
124. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев – М.:Наука, 1983.
125. **Nye, J.F.** Dislocations in wave trains / J.F. Nye, M.V. Berry // *Proc. R. Soc. Lond. A*. – 1974. – Vol. 336(1605). – P. 165-190.
126. **Basisty, I.V.** Optics of light beams with screw dislocations / I.V. Basisty, V.Yu. Bazhenov, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // *Opt. Commun.* – 1993. – Vol. 103. – P. 422.
127. **Shen, Y.** Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities / Y. Shen, X. Wang, Z. Xie, C. Min, X. Fu, Q. Liu, M. Gong, X. Yuan // *Light: Sci. Appl.* – 2019. – Vol. 8. – P. 90.
128. **De Araujo, L.E.E.** Measuring vortex charge with a triangular aperture / L.E.E. de Araujo, M.E. Anderson // *Opt. Lett.* – 2011. – Vol. 36. – P. 787-789.

129. **Melo, L.A.** Direct measurement of the topological charge in elliptical beams using diffraction by a triangular aperture / L.A. Melo, A.J. Jesus-Silva, S. Chávez-Cerda, P.H.S. Ribeiro, W.C. Soares // *Sci. Rep.* – 2018. – Vol. 8. – P. 6370.
130. **Vaity, P.** Measuring the topological charge of an optical vortex by using a tilted convex lens / P. Vaity, J. Banerji, R.P. Singh // *Phys. Lett. A.* – 2013. – Vol. 377. – P. 1154-1156.
131. **Shen, D.** Measuring the topological charge of optical vortices with a twisting phase / D. Shen, D. Zhao // *Opt. Lett.* – 2019. – Vol. 44(9). – P. 2334-2337.
132. **Liu, G.** Measurement of the topological charge and index of vortex vector optical fields with a space-variant half-wave plate / G. Liu, K. Wang, Y. Lee, D. Wang, P. Li, F. Gou, Y. Li, C. Tu, S. Wu, H. Wang // *Opt. Lett.* – 2018. – Vol. 43. – P. 823-826.
133. **Lan, B.** The topological charge measurement of the vortex beam based on dislocation self-reference interferometry / B. Lan, C. Liu, D. Rui, M. Chen, F. Shen, H. Xian // *Phys. Scr.* – 2019. – Vol. 94. – P. 055502.
134. **Kodatskii, B.** Comparative study of reference wave lacking measurement of topological charge of the incoming optical vortex / B. Kodatskii, A. Sevryugin, E. Shalimov, I. Tursunov, V. Venediktov // *Proc. SPIE.* – 2019. – Vol. 11153. – P. 111530G.
135. **Kovalev, A.A.** Orbital angular momentum and topological charge of a multi-vortex Gaussian beam / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2020. – Vol. 37(11). – P. 1740-1747.
136. **Fu, S.** Universal orbital angular momentum spectrum analyzer for beams / S. Fu, Y. Zhai, J. Zhang, X. Liu, R. Song, H. Zhou, C. Gao // *Photonix* (Springer). – 2020. – Vol. 1. – P. 19.
137. **Zeng, J.** Anomalous multi-ramp fractional vortex beams with arbitrary topological charge jumps / J. Zeng, H. Zhang, Z. Xu, C. Zhao, Y. Cai, G. Gbur // *Appl. Phys. Lett.* – 2020. – Vol. 117. – P. 241103.
138. **Kotlyar, V.V.** Evolution of an optical vortex with an initial fractional topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.G. Nalimov, A.P. Porfirev // *Phys. Rev. A.* – 2020. – Vol. 102. – P. 023516.

139. **Zhang, Z.** Tunable topological charge vortex microlaser / Z. Zhang, X. Qiao, B. Midya, K. Liu, J. Sun, T. Wu, W. Liu, R. Agarwal, J.M. Jornet, S. Longhi, N.M. Litchinitser, L. Feng // *Science*. – 2020. – Vol. 368. – P. 760-763.
140. **Zhang, K.** A Review of orbital angular momentum vortex beams generation: from traditional methods to metasurfaces / K. Zhang, Y. Wang, Y. Yuan, S.N. Burokur // *Appl. Sci. (MDPI)*. – 2020. – Vol. 10. – P. 1015.
141. **Волярь, А.В.** Лавинная неустойчивость орбитального углового момента оптических вихрей высших порядков / А.В. Волярь, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 1. – С. 14-24. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-14-24.
142. **Wei, D.** Generating controllable Laguerre-Gaussian laser modes through intercavity spin-orbital angular momentum conversion of light / D. Wei, Y. Cheng, R. Ni, Y. Zhang, X. Hu, S. Zhu, M. Xiao // *Physical Review Applied*. – 2019. – Vol. 11. – P. 014038.
143. **Ruffalo, G.** Multiplication and division of the orbital angular momentum of light with diffractive transformation optics / G. Ruffalo, M. Massari, F. Romanato // *Light: Science & Applications*. – 2019. – Vol. 8. – P. 113.
144. **Gong, L.** Optical orbital-angular-momentum multiplexed data transmission under high scattering / L. Gong, Q. Zhao, H. Zheng, X. Hu, K. Huang, J. Yang, Y. Li // *Light: Science & Applications*. – 2019. – Vol. 8. – P. 27.
145. **Kazemi, S.H.** Identifying orbital angular momentum of light in quantum wells / S.H. Kazemi, M. Mahmoudi // *Laser Physics Letters*. – 2019. – Vol. 16. – P. 076001.
146. **Konzelmann, A.M.** Interaction of orbital angular momentum light with Rydberg excitons: modifying dipole selection rules / A.M. Konzelmann, S.O. Kruger, H. Giessen // *Physical Review B*. – 2019. – Vol. 100. – P. 115308.
147. **Rybakov, F.N.** Chiral magnetic skyrmions with arbitrary topological charge / F.N. Rybakov, N.S. Kiselev // *Physical Review B*. – 2019. – Vol. 99. – P. 064437.

148. **Zhang, L.** Dynamical detection of topological charges / L. Zhang, L. Zhang, X. Liu // *Physical Review A*. – 2019. – Vol. 99. – P. 053606.
149. **Kotlyar, V.V.** Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // *Journal of Modern Optics*. – 2004. – Vol. 51(5). – P. 761–773.
150. **Kotlyar, V.V.** Family of hypergeometric laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2008. – Vol. 25(1). – P. 262-270.
151. **Janicijevic, L.J.** Fraunhoferdiffraction of a Gaussian beam by a four-sector binary grating with a half period fringes shift between adjacent sectors / L.J. Janicijevic, S. Topuzoski, L. Stoyanov, A. Dreischuh // *Optical and Quantum Electronics*. – 2019. – Vol. 51. – P. 71.
152. **Barcelo-Chong, A.** Asymmetric Mathieu beams / A. Barcelo-Chong, B. Estrada-Portillo, A. Canales-Benavides, S. Lopez-Aguayo // *Chinese Optics Letters*. – 2018. – Vol. 16(12). – P. 122601.
153. **Zhao, Q.** Shaping diffraction-free Lommel beams with digital binary amplitude masks / Q. Zhao, L. Gong, Y.M. Li // *Applied Optics*. – 2015. – Vol. 54(25). – P. 7553-7558.
154. **Anguiano-Morales, M.** Self-healing properties of asymmetric Bessel beams / M. Anguiano-Morales // *Optical and Quantum Electronics*. – 2018. – Vol. 50. – P. 363.
155. **Wu, Q.** Study of the nonparaxial propagation of asymmetric Bessel-Gauss beams by using virtual source method / Q. Wu, Z. Ren // *Optics Communications*. – 2019. – Vol. 432. – P. 8-12.
156. **Alam, S.U.** Nonlinear frequency doubling characteristics of asymmetric vortices of tunable, broad orbital angular momentum spectrum / S.U. Alam, A.S. Rao, A. Ghosh, P. Vaity, G.K. Samanta // *Applied Physics Letters*. – 2018. – Vol. 112. – P. 171102.
157. **Седлецкий, А.М.** Асимптотика нулей вырожденной гипергеометрической функции / А.М. Седлецкий // *Математические заметки*. – 2007. – Т. 82(2). – С. 262-271.
158. **Абрамовиц, М.** Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стеган. – М.: Наука. 1979.

159. **Gutiérrez-Vega, J.C.** Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams / J.C. Gutiérrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo, S. Chávez-Cerda // *Optics Letters*. - 2000. - Vol. 25(20). - (2000). - P. 1493–1495.
160. **Bandres, M.A.** Parabolic nondiffracting optical wave fields / M.A. Bandres, J.C. Gutiérrez-Vega, S. Chávez-Cerda // *Optics Letters*. - 2004. - Vol. 29(1). - P. 44–46.
161. **McLeod, J.H.** The axicon: a new type of optical element / J.H. McLeod // *Journal of the Optical Society of America*. 1954. - Vol.44(8). - P. 592–597.
162. **Indebetouw, G.** Nondiffracting optical fields: some remarks on their analysis and synthesis / G. Indebetouw // *Journal of the Optical Society of America A*. - 1989. - Vol. 6(1). - P. 150–152.
163. **Kotlyar, V.V.** Optimal phase element for generating a perfect optical vortex / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Journal of the Optical Society of America A*. - 2016. - Vol. 33(13). - P. 2376–2384.
164. **Caron, C.E.R.** Bessel-modulated Gaussian beams with quadratic radial dependence / C.E.R. Caron, R.M. Potuliege // *Optics Communications*. - 1999. - Vol. 164 (1-3). - P. 83–93.
165. **Li, G.** New generalized Bessel-Gauss laser beams / G. Li, H. Lee, E. Wolf // *Journal of the Optical Society of America A*. - 2004. - Vol. 21(4). - P. 640–646.
166. **Kotlyar, V.V.** Hankel-Bessel laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Journal of the Optical Society of America A*. - 2012. - Vol. 29(5). - P. 741–747.
167. **Hebri, D.** Combined half-integer Bessel-like beams: A set of solutions of the wave equation / D. Hebri, S. Rasouli // *Physical Review A*. - 2018. - Vol. 98. - P. 043826.
168. **Ismail, Y.** Shape invariant higher-order Bessel-like beams carrying orbital angular momentum / Y. Ismail, N. Khilo, V. Belyi, A. Forbes // *Journal of Optics*. - 2012. - Vol. 14(8). - P. 085703.
169. **Pei, S.C.** Eigenfunctions of linear canonical transform / S.C. Pei, J.J. Ding // *IEEE Transactions on Signal Processing*. - 2002. - Vol. 50(1). - P. 11–26.
170. **Goodman, J.W.** Introduction to Fourier Optics / J.W. Goodman. - 2nd ed. - New York: McGraw-Hill. 1996. - 491 p.

171. Integrals and series. Volume 2: Special functions / A.P. Prudnikov, Y.A. Brychkov, O.I. Marichev. - New York: Gordon and Breach. 1986. - 640 p.
172. **Wen, Y.** Compact and high-performance vortex mode sorter for multi-dimensional multiplexed fiber communication systems / Y. Wen, I. Chremmos, Yu. Chen, G. Zhu, J. Zhang, J. Zhu, Ya. Zhang, J. Liu, S. Yu // *Optica*. - 2020. - Vol. 7(3). - P. 254-262.
173. **Cao, W.** Determination of effective parameters of fishnet metamaterials with vortex based interferometry / W. Cao, J. Gao, X. Yang // *Optics Express*. - 2020. - Vol. 28(14). - P. 20051-20061.
174. **Cicek, K.** Integrated vortex beam emitter device for optical manipulation / K. Cicek, A. Kocyigit, R. Topkaya, X. Cai, // *Applied Optics*. - 2020. - Vol. 59(10). - P. 3179-3182.

Научное издание

В.В. Котляр, А.А. Ковалев

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЗАРЯД ОПТИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ

Технический редактор Вахе М.А.

Подписано в печать 20.08.2021. Усл. печ. листов 21,4.
Отпечатано в типографии «Предприятие ООО «Новая техника».
Печать офсетная. Формат 62×84 1/16. Тираж 200 экз.